

# **Théorie élémentaire des fonctions analytiques** d'une ou plusieurs variables complexes

**Henri Cartan**

**COLLECTION ENSEIGNEMENT DES SCIENCES**

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

ISBN 2 7056 5215 9

Sixième édition juin 1985

Nouveau tirage 1992

1961, Hermann, éditeurs des sciences et des arts. 293 rue Lecourbe, 75014 Paris

Tous droits de reproduction, même fragmentaire, sous quelque forme que ce soit, y compris photographie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, réservés pour tous pays.

Henri Cartan

Théorie élémentaire des  
**fonctions analytiques**  
d'une ou plusieurs variables complexes

Avec le concours de Reiji Takahashi

# Table des matières

<b>Théorie élémentaire des fonctions analytiques.....</b>	<b>1</b>
<b>Avant-propos .....</b>	<b>13</b>
<b>Chapitre I - Séries entières à une variable .....</b>	<b>15</b>
<b>I.1 Séries entières formelles .....</b>	<b>15</b>
I.1.1 Algèbre des polynomes.....	15
I.1.2 Algèbre des séries formelles.....	16
I.1.3 Ordre d'une série formelle.....	17
I.1.4 Substitution d'une série formelle dans une autre .....	18
I.1.5 Inverse d'une série formelle .....	20
I.1.6 Dérivée d'une série formelle .....	21
I.1.7 Séries réciproques .....	21
<b>I.2 Séries entières convergentes.....</b>	<b>22</b>
I.2.1 Corps complexe .....	22
I.2.2 Rappel de notions concernant la convergence des séries de fonction .....	24
I.2.3 Rayon de convergence d'une série entière .....	25
I.2.4 Addition et multiplication des séries entières convergentes .....	27
I.2.5 Substitution d'une série entière convergente dans une autre .....	28
I.2.6 Inverse d'une série entière convergente .....	30
I.2.7 Dérivation d'une série entière convergente .....	30
I.2.8 Calcul des coefficients d'une série entière .....	32
I.2.9 Série réciproque d'une série entière convergente.....	32
<b>I.3 Fonction exponentielle et fonction logarithmique .....</b>	<b>34</b>
I.3.1 Fonction exponentielle .....	34
I.3.2 Fonction exponentielle réelle $e^x$ .....	35
I.2.3 Fonction exponentielle imaginaire $e^y$ .....	36
I.2.4 Mesure des angles Argument d'un nombre complexe .	38
I.2.5 Logarithme complexe.....	39
I.3.6 Développement en série du logarithme complexe .....	41
<b>I.4 Fonctions analytiques d'une variable réelle ou complexe .....</b>	<b>42</b>
I.4.1 Définitions .....	42

I.4.2 Critère d'analyticité	43
I.4.3 Principe du prolongement analytique	46
I.4.5 Fonctions méromorphes	48
I.4.4 Zéros d'une fonction analytique	47
<b>I. Exercices</b>	<b>49</b>
<b>Chapitre II - Fonctions holomorphes, intégrale de Cauchy</b>	<b>55</b>
<b>II.1 Intégrales curvilignes</b>	<b>55</b>
II.1.1 Généralité	55
II.1.2 Primitive d'une forme différentielle	58
II.1.3 Formule de Green-Riemann	60
II.1.4 Formes différentielles fermées	62
II.1.5 Etude des primitives non uniformes	63
II.1.6 Homotopie	65
II.1.7 Primitives dans un ouvert simplement connexe	68
II.1.8 Indice d'un chemin fermé	69
II.1.9 Compléments : bord orienté d'un compact	71
<b>II.2 Fonctions holomorphes; théorèmes fondamentaux</b>	<b>72</b>
II.2.1 Rappel sur les fonctions différentiables	72
II.2.2 Condition d'holomorphie	73
II.2.3 Introduction des variables $z$ et son conjugué	74
II.2.4 Théorème de Cauchy	76
II.2.5 Formule intégrale de Cauchy	79
II.2.6 Développement de Taylor d'une fonction holomorphe	79
II.2.7 Théorème de Morera	80
II.2.8 Variante pour la formule intégrale de Cauchy	81
II.2.9 Principe de symétrie de Schwarz	81
<b>II. Exercices</b>	<b>82</b>
<b>Chapitre III - Développements de Taylor et de Laurent. Points singuliers et r�sids</b>	<b>86</b>
<b>III.1 Inégalités de Cauchy; théorème de Liouville</b>	<b>86</b>
III.1.1 Expression intégrale des coefficients de Taylor	86
III.1.2 Théorème de Liouville	87
<b>III.2 Propriété de moyenne; principe du maximum</b>	<b>88</b>
III.2.1 Propriété de moyenne	88

III.2.2 Principe du maximum.....	89
<b>III.3 Lemme de Schwarz .....</b>	<b>90</b>
<b>III.4 Développement de Laurent.....</b>	<b>91</b>
III.4.1 Séries de Laurent .....	91
III.4.2 Développement en série de Laurent d'une fonction holomorphe dans une couronne .....	92
III.4.3 Décomposition d'une fonction holomorphe dans une couronne.....	94
III.4.4 Inégalités de Cauchy; application à l'étude d'un point singulier isolé.....	94
<b>III.5 Introduction du point à l'infini. Théorème des résidus .....</b>	<b>96</b>
III.5.1 Sphère de Riemann .....	96
III.5.2 Théorème des résidus .....	98
III.5.3 Calcul pratique des résidus .....	101
III.5.4 Application à la détermination du nombre des pôles et des zéros d'une fonction méromorphe.....	103
III.5.5 Application aux fonctions doublement périodiques ..	104
<b>III.6 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus .....</b>	<b>106</b>
III.6 Lemme 1 .....	108
III.6 Lemme 2 .....	108
III.6 Lemme 3 .....	110
III.6 Lemme 4 .....	111
<b>III. Exercices .....</b>	<b>116</b>

## **Chapitre IV - Fonctions analytiques de plusieurs**

<b>variables, fonctions harmoniques.....</b>	<b>126</b>
<b>IV.1 Séries entières à plusieurs variables .....</b>	<b>126</b>
IV.1.1 L'algèbre $K[[X,Y]]$ .....	126
IV.1.2 Domaine de convergence d'une série entière multiple .....	127
IV.1.3 Opérations sur les séries entières convergentes.....	128
<b>IV.2 Fonctions analytiques .....</b>	<b>129</b>
IV.2.1 Fonctions analytiques en série entière .....	129
IV.2.2 Fonctions analytiques; opérations sur ces fonctions..	129
IV.2.3 Principe du prolongement analytique .....	130
<b>IV.3 Fonctions harmoniques de deux variables réelles .....</b>	<b>130</b>

IV.3.1 Définition des fonctions harmoniques.....	130
IV.3.2 Fonctions harmoniques et fonctions holomorphes ...	131
IV.3.3 La propriété de moyenne.....	133
IV.3.4 Analyticité des fonctions harmoniques.....	133
IV.3.5 Recherche d'une fonction holomorphe dont la partie réelle est donnée .....	134
<b>IV.4 Formule de Poisson; problème de Dirichlet .....</b>	<b>136</b>
IV.4.1 Représentation intégrale d'une fonction harmonique dans un disque .....	136
IV.4.2 Propriétés du noyau de Poisson.....	137
IV.4.3 Problème de Dirichlet pour un disque.....	137
IV.4.4 Solution du problème de Dirichlet pour un disque....	138
IV.4.5 Caractérisation des fonctions harmonique par la propriété de moyenne .....	140
<b>IV.5 Fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes .....</b>	<b>140</b>
IV.5.1 Définition d'une fonction holomorphe.....	140
IV.5.2 Formule intégrale de Cauchy .....	141
IV.5.3 Développement en série d'une fonction holomorphe .....	142
IV.5.4 Calcul des coefficients du développement de Taylor d'une fonction holomorphe .....	143
IV.5.5 Composition des fonctions holomorphes .....	144
IV.5.6 Théorème des fonctions implicites .....	145
<b>IV. Exercices.....</b>	<b>146</b>

<b>Chapitre V - Convergence des suites de fonctions holomorphes ou méromorphes; séries, produits infinis; familles normales.....</b>	<b>150</b>
<b>V.1 Topologie de l'espace <math>C(D)</math> .....</b>	<b>150</b>
V.1.1 Convergence uniforme sur tout compact.....	150
V.1.2 Théorème fondamentaux sur la convergence des fonctions holomorphes .....	151
V.1.3 Topologie de l'espace $C(D)$ .....	154
<b>V.2 Séries de fonctions méromorphes .....</b>	<b>157</b>
V.2.1 Convergence des séries de fonctions méromorphes ...	157
V.2.2 Premier exemple d'une série de fonctions	

méromorphes .....	158
V.2.3 Deuxième exemple d'une série de fonctions	
méromorphes .....	161
V.2.4 Autre exemple .....	161
V.2.5 La fonction P de Weierstrass .....	162
<b>V.3 Produits infinis de fonctions holomorphes .....</b>	<b>166</b>
V.3.1 Définitions.....	166
V.3.2 Propriétés des produits normalement convergents	
de fonctions holomorphes .....	167
V.3.3 Exemple: développement de $\sin(\pi z)$ en produit	
infini.....	168
V.3.4 La fonction Gamma .....	169
<b>V.4 Sous-ensembles compacts de <math>H(D)</math> .....</b>	<b>171</b>
V.4.1 Sous-ensembles bornés de $H(D)$ .....	171
V.4.2 Énoncé du théorème fondamental.....	172
V.4.3 Principe de la démonstration du théorème	
fondamental.....	173
V.4.4 Un lemme .....	173
V.4.5 Démonstration du théorème fondamental .....	175
V.4.6 Quelques conséquences du théorème fondamental ...	176
<b>V. Exercices .....</b>	<b>177</b>
<b>Chapitre VI - Transformations holomorphes.....</b>	<b>181</b>
<b>VI.1 Généralités; exemples .....</b>	<b>181</b>
VI.1.1 Etude locale d'une transformation holomorphe	
$w=f(z)$ quand $f'(z_0)$ non nul .....	181
VI.1.2 Etude locale d'une transformation holomorphe	
$w=f(w)$ quand $f'(z_0)=0$ .....	183
VI.1.3 Transformations holomorphes.....	184
VI.1.4 Exemples de transformations holomorphes	
multivalentes.....	185
<b>VI.2 Représentation conforme.....</b>	<b>187</b>
VI.2.1 Position du problème.....	187
VI.2.2 Automorphismes de $D$ .....	188
VI.2.3 Automorphismes du plan complexe .....	188
VI.2.4 Automorphismes de la sphère de Riemann .....	189
VI.2.5 Etude géométrique du groupe des homographies;	
équivalence du demi-plan et du disque.....	190



VI.2.6 Automorphismes du demi-plan et du disque-unité....	191
<b>VI.3 Théorème fondamental de la représentation</b>	
<b>conforme .....</b>	<b>194</b>
VI.3.1 Enoncé du théorème fondamental .....	194
VI.3.2 Réduction au cas d'un domaine borné .....	195
VI.3.3 Une propriété d'extremum .....	195
<b>VI.4 Notion d'espace analytique; intégration des formes</b>	
<b>différentielles.....</b>	<b>197</b>
VI.4.1 Structures d'espace analytique.....	197
VI.4.2 Applications holomorphes; structure induite.....	198
VI.4.3 Exemples d'espaces analytiques.....	200
VI.4.4 Principe du prolongement analytique; principe du	
maximum .....	201
VI.4.5 Fonctions méromorphes sur un espace analytique ...	202
VI.4.6 Indice de ramification d'une application	
holomorphe .....	202
VI.4.7 Théorème fondamental de la représentation	
conforme.....	203
VI.4.8 Intégration des formes différentielles et théorème	
des résidus.....	204
<b>VI.5 Surfaces de Riemann .....</b>	<b>206</b>
VI.5.1 Définitions .....	206
VI.5.2 Fonctions holomorphes et formes différentielles	
holomorphes sur une surface de Riemann .....	207
VI.5.3 Surface de Riemann attachée à une "courbe	
elliptique" .....	210
VI.5.4 Notions sur le prolongement analytique.....	213
<b>VI. Exercices.....</b>	<b>217</b>
<b>Chapitre VII - Systèmes différentiels holomorphes ...</b>	<b>220</b>
<b>VII.1 Théorème d'existence et d'unicité .....</b>	<b>220</b>
VII.1.1 Position du problème .....	220
VII.1.2 Cas $k=1$ : partie formelle .....	221
VII.1.3 Cas $k=1$ : questions de convergence.....	222
VII.1.4 Cas où $k$ est quelconque.....	224
<b>VII.2 Dépendance des paramètres et des conditions</b>	
<b>initiales.....</b>	<b>226</b>

VII.2.1 Dépendance des paramètres .....	226
VII.2.2 Dépendance des conditions initiales .....	228
VII.3 Equations différentielles d'ordre supérieur .....	229
<b>VII. Exercices .....</b>	<b>229</b>
<b>Quelques réponses numériques ou quantitatives .....</b>	<b>232</b>
<b>Index terminologique .....</b>	<b>233</b>
<b>Index des notations .....</b>	<b>237</b>
<b>Présentation .....</b>	<b>239</b>

## Table des matières

CHAPITRE I. SÉRIES ENTIÈRES A UNE VARIABLE .....	9
1. Séries entières formelles .....	9
2. Séries entières convergentes .....	16
3. Exponentielle et logarithme .....	28
4. Fonctions analytiques d'une variable .....	36
Exercices .....	43
CHAPITRE II. FONCTIONS HOLOMORPHES; INTÉGRALE DE CAUCHY .....	49
1. Intégrales curvilignes; primitive d'une forme fermée .....	49
2. Fonctions holomorphes; théorèmes fondamentaux .....	66
Exercices .....	76
CHAPITRE III. DÉVELOPPEMENTS DE TAYLOR ET DE LAURENT; POINTS SINGULIERS; RÉSIDUS .....	80
1. Inégalités de Cauchy; théorème de Liouville .....	80
2. Propriété de moyenne et principe du maximum .....	82
3. Lemme de Schwarz .....	84
4. Développement de Laurent .....	85
5. Introduction du point à l'infini. Théorème des résidus .....	90
6. Calcul d'intégrales par la méthode des résidus .....	100
Exercices .....	109
CHAPITRE IV. FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES; FONCTIONS HARMONIQUES .....	120
1. Séries entières à plusieurs variables .....	120
2. Fonctions analytiques .....	123
3. Fonctions harmoniques de deux variables réelles .....	124
4. Formule de Poisson; problème de Dirichlet .....	129
5. Fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes .....	134
Exercices .....	140

CHAPITRE V. CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS HOLOMORPHES OU MÉROMORPHES; SÉRIES, PRODUITS INFINIS; FAMILLES NORMALES . . .	144
1. Topologie de l'espace $\mathcal{E}(D)$ . . . . .	144
2. Séries de fonctions méromorphes . . . . .	150
3. Produits infinis de fonctions holomorphes . . . . .	160
4. Sous-ensembles compacts de $\mathcal{H}(D)$ . . . . .	165
Exercices . . . . .	171
CHAPITRE VI. TRANSFORMATIONS HOLOMORPHES . . . . .	175
1. Généralités; exemples . . . . .	175
2. Représentation conforme; automorphismes du plan, de la sphère de Riemann, du disque ouvert . . . . .	181
3. Théorème fondamental de la représentation conforme . . . . .	187
4. Notion d'espace analytique; intégration des formes diffé- rentielles . . . . .	191
5. Surfaces de Riemann . . . . .	199
Exercices . . . . .	210
CHAPITRE VII. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS HOLOMORPHES . . . . .	214
1. Théorème d'existence et d'unicité . . . . .	214
2. Dépendance des paramètres et des conditions initiales . . . . .	220
3. Équations différentielles d'ordre supérieur . . . . .	222
Exercices . . . . .	223
QUELQUES RÉPONSES NUMÉRIQUES OU QUANTITATIVES . . . . .	226
INDEX TERMINOLOGIQUE . . . . .	227
INDEX DES NOTATIONS . . . . .	231

## Avant-propos

Le présent volume reprend, avec quelques additions, un cours professé à la Faculté des Sciences de Paris, dans le cadre de la licence d'enseignement, pendant les années scolaires 1957-58, 1958-59 et 1959-60. Il est consacré essentiellement à la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Le cas des fonctions analytiques de plusieurs variables réelles ou complexes est néanmoins abordé au chapitre IV, ne serait-ce que pour permettre d'envisager les fonctions harmoniques de deux variables réelles comme des fonctions analytiques, et de traiter, au chapitre VII, du théorème d'existence des solutions des systèmes différentiels dans le cas où les données sont analytiques.

Le sujet traité dans ce livre couvre la partie du programme du certificat de « Mathématiques II » consacrée aux fonctions analytiques. Ce même sujet était déjà inclus dans le certificat de « Calcul différentiel et intégral » de l'ancienne licence.

Les programmes des certificats de licence n'étant pas fixés dans le détail, le professeur conserve en principe une assez grande liberté pour la matière de son cours. Cette liberté n'est guère limitée que par la tradition; lorsqu'il s'agit des fonctions analytiques d'une variable complexe, la tradition, en France, est à vrai dire assez bien établie. Il sera donc peut-être bon d'indiquer maintenant dans quelle mesure je me suis écarté de cette tradition. En premier lieu, j'ai préféré commencer par présenter non le point de vue de Cauchy (fonctions dérivables et intégrale de Cauchy), mais le « point de vue de Weierstrass », c'est-à-dire la théorie des séries entières convergentes (chapitre I). Celle-ci est elle-même précédée d'un exposé succinct des opérations formelles sur les séries entières, c'est-à-dire de ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie des séries formelles. J'ai aussi innové vis-à-vis de la tradition en consacrant deux paragraphes du chapitre VI à une exposition systématique, quoique fort élémentaire, de la théorie des « espaces analytiques » abstraits (à une dimension complexe). Ce qui

est appelé ici « espace analytique » n'est pas autre chose que ce qui était auparavant et est encore souvent désigné sous le nom de « surface de Riemann »; nous avons préféré réserver le nom de surface de Riemann à la double donnée d'un espace analytique et d'une application holomorphe de cet espace dans le plan complexe (ou, plus généralement, dans un autre espace analytique). Ainsi se trouve établie, avec toute la netteté désirable, une distinction entre deux notions que la terminologie classique rendait impossible.

Sur un sujet aussi classique que la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, auquel tant de traités ont été consacrés et sont encore consacrés dans tous les pays, il ne pouvait être question de prétendre à l'originalité. Si le présent traité se distingue de ceux qui l'ont précédé en France, c'est peut-être parce qu'on s'y conforme à un usage récent, et qui tend à se répandre de plus en plus : un texte mathématique doit contenir des énoncés précis de propositions ou de théorèmes, énoncés qui se suffisent à eux-mêmes et auxquels il soit possible à tout instant de se référer. A quelques rares exceptions près, qui sont expressément signalées, il est donné des démonstrations complètes de tous les énoncés du texte.

Les questions un peu délicates de Topologie plane, en relation avec l'intégrale de Cauchy et la considération des fonctions « multiformes », ont été abordées franchement au chapitre II. Ici encore, on a pensé que quelques énoncés précis étaient préférables à de vagues intuitions et à des idées floues. Sur ces questions de Topologie plane, je me suis inspiré du livre excellent de L. Ahlfors (*Complex Analysis*), sans toutefois me conformer entièrement aux points de vue qui y sont développés. Quant aux notions de base de la Topologie générale, elles sont supposées connues du lecteur et utilisées en maints endroits de ce livre; en effet, ce cours s'adresse aux étudiants de « Mathématiques II », qui sont censés avoir déjà étudié le programme de « Mathématiques I ».

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur Reiji Takahashi qui, fort de l'expérience qu'il a acquise en dirigeant les travaux pratiques des étudiants, a bien voulu compléter les divers chapitres de ce livre par des énoncés d'exercices et de problèmes. Nous souhaitons que le lecteur ait ainsi la possibilité de s'assurer qu'il a compris et assimilé les notions théoriques exposées dans le texte.

HENRI CARTAN

Die (Drôme), le 4 août 1960

# Séries entières à une variable

## 1. Séries entières formelles

### 1. ALGÈBRE DES POLYNOMES

Soit  $K$  un corps commutatif. On considère les polynômes formels à une lettre (ou « indéterminée »)  $X$  à coefficients dans  $K$  (pour le moment il n'est pas question de donner de valeur à  $X$ ). L'addition de deux polynômes, la multiplication d'un polynôme par un « scalaire » (c'est-à-dire par un élément de  $K$ ) font de l'ensemble  $K[X]$  des polynômes un *espace vectoriel* sur  $K$ , ayant la base infinie

$$1, X, \dots, X^n, \dots$$

Chaque polynôme est une combinaison linéaire finie des  $X^n$  à coefficients dans  $K$ , qu'on écrit  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ , étant entendu que, dans la suite illimitée des coefficients  $a_n$ , tous sont nuls sauf un nombre fini. La table de multiplication

$$X^p \cdot X^q = X^{p+q}$$

définit une multiplication dans  $K[X]$ ; le produit

$$\left( \sum_p a_p X^p \right) \cdot \left( \sum_q b_q X^q \right)$$

est  $\sum_n c_n X^n$ , où

$$(1.1) \quad c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

Cette multiplication est commutative et associative. Elle est bilinéaire, en ce sens que

$$(1.2) \quad \begin{cases} (P_1 + P_2) \cdot Q = P_1 Q + P_2 Q \\ (\lambda P) \cdot Q = \lambda \cdot (PQ) \end{cases}$$

quels que soient les polynômes  $P, P_1, P_2, Q$  et le scalaire  $\lambda$ . Elle admet comme élément unité (noté 1) le polynôme  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  tel que  $a_0 = 1, a_n = 0$  pour  $n > 0$ . On exprime toutes ces propriétés en disant que  $K[X]$ , muni de sa structure d'espace vectoriel et de sa multiplication, est une *algèbre commutative* sur le corps  $K$ , avec élément unité; c'est, en particulier, un anneau commutatif à élément unité.

## 2. ALGÈBRE DES SÉRIES FORMELLES

Une série entière formelle en  $X$  est une expression formelle  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ , où cette fois on ne suppose plus nécessairement que les coefficients  $a_n$  soient nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On définit la somme des deux séries formelles

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n X^n \right) + \left( \sum_{n \geq 0} b_n X^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n, \quad \text{où} \quad c_n = a_n + b_n,$$

ainsi que le produit d'une série formelle par un scalaire :

$$\lambda \left( \sum_{n \geq 0} a_n X^n \right) = \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) X^n.$$

L'ensemble  $K[[X]]$  des séries formelles forme ainsi un espace vectoriel sur  $K$ . On note 0 l'élément neutre de l'addition; c'est la série formelle dont tous les coefficients sont nuls.

Le produit de deux séries formelles se définit encore par la formule (1.1), qui conserve un sens car dans le second membre il n'y a qu'un nombre fini de termes à ajouter. La multiplication est encore commutative et associative, et bilinéaire vis-à-vis de la structure vectorielle. Ainsi  $K[[X]]$  est une algèbre sur le corps  $K$ , ayant pour élément unité (noté 1) la série

$\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  telle que  $a_0 = 1, a_n = 0$  pour  $n > 0$ .

L'algèbre  $K[X]$  s'identifie à une sous-algèbre de  $K[[X]]$ , à savoir la sous-algèbre des séries formelles dont les coefficients sont tous nuls sauf un nombre fini.

## 3. ORDRE D'UNE SÉRIE FORMELLE

Soit  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ , notée encore  $S$  pour abrégier. L'ordre  $\omega(S)$  de cette série est un entier qui n'est défini que si  $S \neq 0$  : c'est le plus petit  $n$  tel que  $a_n \neq 0$ . On dit qu'une série formelle  $S$  est d'ordre  $\geq k$  si elle est 0 ou si  $\omega(S) \geq k$ . Par abus de langage, on écrit  $\omega(S) \geq k$  même lorsque  $S = 0$ , bien que  $\omega(S)$  ne soit pas défini dans ce cas.



*Remarque.* On pourrait convenir que  $\omega(0) = +\infty$ . Les  $S$  telles que  $\omega(S) \geq k$  ( $k$  entier donné) sont simplement les séries  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  telles que  $a_n = 0$  pour  $n < k$ . Elles forment un sous-espace vectoriel de  $K[[X]]$ .

*Définition.* Une famille  $(S_i(X))_{i \in I}$ , où  $I$  désigne un ensemble d'indices, est dite *sommable* si, pour tout entier  $k$ , on a  $\omega(S_i) \geq k$  sauf pour un nombre fini d'indices  $i$ . Par définition, la *somme* d'une famille sommable de séries formelles

$$S_i(X) = \sum_{n \geq 0} a_{n,i} X^n$$

est la série

$$S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n,$$

où, pour chaque  $n$ ,  $a_n = \sum_i a_{n,i}$ . Ceci a un sens puisque par hypothèse les  $a_{n,i}$ , pour  $n$  donné, sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de  $i$ . L'opération d'addition des séries formelles, lorsqu'elles forment une famille sommable, généralise l'addition finie, déduite de la structure vectorielle de  $K[[X]]$ . Cette addition généralisée est commutative et associative dans un sens que le lecteur précisera.

La notation formelle  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  peut alors se justifier a posteriori. En effet, convenons d'appeler *monôme* de degré  $p$  une série formelle  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  telle que  $a_n = 0$  pour  $n \neq p$ ; notons  $a_p X^p$  un tel monôme. La famille des monômes

$$\{a_n X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

( $\mathbb{N}$  désignant l'ensemble des entiers  $\geq 0$ ) est évidemment sommable, et sa somme n'est autre que la série formelle  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ .

*Remarque.* Le produit des deux séries formelles

$$\left( \sum_p a_p X^p \right) \cdot \left( \sum_q b_q X^q \right)$$

n'est autre que la somme de la famille sommable, formée de tous les produits

$$(a_p X^p) \cdot (b_q X^q) = (a_p b_q) X^{p+q}$$

d'un monôme de la première série par un monôme de la seconde série.

**PROPOSITION 3. 1.** *L'anneau  $K[[X]]$  est un anneau d'intégrité (ceci signifie que  $S \neq 0$  et  $T \neq 0$  entraînent  $ST \neq 0$ ).*

*Démonstration:* Supposons  $S(X) = \sum_p a_p X^p$  et  $T(X) = \sum_q b_q X^q$  non nulles. Soient  $p = \omega(S)$ ,  $q = \omega(T)$ ; soit

$$S(X) \cdot T(X) = \sum_n c_n X^n;$$

on a évidemment  $c_n = 0$  pour  $n < p + q$ ,  $c_{p+q} = a_p b_q$ . Puisque  $K$  est un corps et que  $a_p \neq 0$ ,  $b_q \neq 0$ , on a  $c_{p+q} \neq 0$ , donc  $S \cdot T$  n'est pas nulle. De plus on a prouvé que

$$(3. 1) \quad \omega(ST) = \omega(S) + \omega(T) \quad \text{pour} \quad S \neq 0, \quad T \neq 0.$$

*Remarque.* On pourrait considérer des séries formelles à coefficients dans un anneau commutatif  $A$  à élément-unité, et non plus nécessairement à coefficients dans un corps  $K$ ; la démonstration précédente prouve que si  $A$  est un anneau d'intégrité,  $A[[X]]$  est aussi un anneau d'intégrité.

#### 4. SUBSTITUTION D'UNE SÉRIE FORMELLE DANS UNE AUTRE

Considérons deux séries formelles

$$S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n, \quad T(Y) = \sum_{p \geq 0} b_p Y^p.$$

Supposons, ce qui est essentiel, que  $b_0 = 0$ , autrement dit que  $\omega(T) \geq 1$ . A chaque monôme  $a_n X^n$  associons la série formelle  $a_n (T(Y))^n$ , ce qui a un sens puisque les séries formelles en  $Y$  forment une algèbre. Puisque  $b_0 = 0$ , l'ordre de  $a_n (T(Y))^n$  est  $\geq n$ ; donc la famille des  $a_n (T(Y))^n$  (lorsque  $n$  prend les valeurs  $0, 1, \dots$ ) est sommable, et on peut considérer la série formelle

$$(4. 1) \quad \sum_{n \geq 0} a_n (T(Y))^n,$$

dont on regroupera les termes en  $Y$ . Cette série formelle en  $Y$  est dite obtenue par substitution de  $T(Y)$  à  $X$  dans  $S(X)$ ; on la note  $S(T(Y))$ , ou encore  $S \circ T$  lorsqu'on ne spécifie pas le nom de l'indéterminée  $Y$ . Le lecteur vérifiera les relations :

$$(4. 2) \quad \begin{cases} (S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T \\ (S_1 S_2) \circ T = (S_1 \circ T) (S_2 \circ T), & 1 \circ T = 1. \end{cases}$$

Mais on se gardera de croire que  $S \circ (T_1 + T_2)$  soit égal à  $S \circ T_1 + S \circ T_2$ .

Les relations (4. 2) expriment que, pour un  $T$  donné (d'ordre  $\geq 1$ ), l'application  $S \rightarrow S \circ T$  est un homomorphisme de l'anneau  $K[[X]]$  dans l'anneau  $K[[Y]]$ , qui transforme l'élément unité  $1$  dans  $1$ .

*Remarque.* Si on substitue 0 dans  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ , on trouve la série formelle  $a_0$ , réduite à son « terme constant ».

Si on a une famille sommable de séries formelles  $S_i$  et si  $\omega(T) \geq 1$ , la famille des  $S_i \circ T$  est sommable et l'on a

$$(4.3) \quad \left( \sum_i S_i \right) \circ T = \sum (S_i \circ T),$$

ce qui généralise la première des relations (4.2). En effet, soit

$$S_i(X) = \sum_{n \geq 0} a_{n,i} X^n;$$

on a

$$\sum_i S_i(X) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_i a_{n,i} \right) X^n,$$

d'où

$$(4.4) \quad \left( \sum_i S_i \right) \circ T = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_i a_{n,i} \right) (T(Y))^n,$$

tandis que

$$(4.5) \quad \sum_i S_i \circ T = \sum_i \left( \sum_{n \geq 0} a_{n,i} (T(Y))^n \right).$$

Pour prouver l'égalité des seconds membres de (4.4) et (4.5), on observe que, dans chacun d'eux, le coefficient d'une puissance donnée  $Y^p$  ne fait intervenir qu'un nombre fini de coefficients  $a_{n,i}$  et on applique l'associativité de l'addition (finie) dans le corps  $K$ .

**PROPOSITION 4. 1.** *On a la relation*

$$(4.6) \quad (S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$$

chaque fois que  $\omega(T) \geq 1$ ,  $\omega(U) \geq 1$  (associativité de la substitution).

*Démonstration.* Les deux membres de (4.6) ont un sens. Lorsque  $S$  est un monôme, ils sont égaux car on a

$$(4.7) \quad T^n \circ U = (T \circ U)^n$$

en raison de la deuxième relation (4.2), par récurrence sur  $n$ .

Le cas général de (4.6) se déduit de là en considérant la série  $S$  comme la somme (infinie) de ses monômes  $\sum_n a_n X^n$ ; on a, par définition,

$$S \circ T = \sum_{n \geq 0} a_n T^n,$$

et, d'après (4.3),

$$(S \circ T) \circ U = \sum_{n \geq 0} a_n (T^n \circ U),$$

ce qui, d'après (4. 7), est égal à

$$\sum_{n \geq 0} a_n (T \circ U)^n = S \circ (T \circ U). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

### 5. INVERSE D'UNE SÉRIE FORMELLE

Dans l'anneau  $K[[Y]]$ , on a l'identité

$$(5. 1) \quad (1 - Y)(1 + Y + \dots + Y^n + \dots) = 1,$$

dont la vérification est immédiate. Donc la série  $1 - Y$  a un inverse dans  $K[[Y]]$ .

**PROPOSITION 5. 1.** *Pour que  $S(X) = \sum_n a_n X^n$  possède un élément inverse pour la multiplication de  $K[[X]]$ , il faut et il suffit que  $a_0 \neq 0$ , c'est-à-dire  $\zeta(0) \neq 0$ .*

*Démonstration.* C'est nécessaire, car si

$$T(X) = \sum_n b_n X^n \quad \text{et} \quad S(X)T(X) = 1,$$

on a  $a_0 b_0 = 1$ , d'où  $a_0 \neq 0$ . Réciproquement, supposons  $a_0 \neq 0$ ; on va montrer que  $(a_0)^{-1}S(X) = S_1(X)$  a un inverse  $T_1(X)$ , d'où il résultera  $S(X)$  a pour inverse  $(a_0)^{-1}T_1(X)$ . Or

$$S_1(X) = 1 - U(X), \quad \omega(U) \geq 1;$$

on peut donc substituer  $U(X)$  à  $Y$  dans la relation (5. 1), et par suite  $1 - U(X)$  a un inverse. C.Q.F.D.

*Remarque.* On a plongé l'algèbre  $K[X]$  des polynômes dans l'algèbre  $K[[X]]$  des séries formelles. On voit que tout polynôme  $Q(X)$  tel que  $Q(0) \neq 0$  possède un inverse dans l'anneau  $K[[X]]$ ; cet anneau contient donc tous les quotients  $P(X)/Q(X)$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes tels que  $Q(0) \neq 0$ .

### 6. DÉRIVÉE D'UNE SÉRIE FORMELLE

Soit  $S(X) = \sum a_n X^n$ ; par définition, la série *dérivée*  $S'(X)$  est donnée par la formule

$$(6. 1) \quad S'(X) = \sum_{n \geq 0} n a_n X^{n-1}.$$

On écrit aussi  $\frac{dS}{dX}$ , ou encore  $\frac{d}{dX} S$ , pour la dérivée  $S'$ . La dérivée d'une somme (finie ou infinie) est égale à la somme des dérivées. L'application  $S \rightarrow S'$  est une application linéaire de  $K[[X]]$  dans elle-même. De plus,

la dérivée du produit de deux séries formelles est donnée par la formule

$$(6. 2) \quad \frac{d}{dX} (ST) = \frac{dS}{dX} T + S \frac{dT}{dX}.$$

En effet, il suffit de vérifier cette formule dans le cas particulier où S et T sont des monômes, et alors c'est immédiat.

Si  $S(0) \neq 0$ , soit T l'inverse de S (cf. n° 5). La formule (6. 2) donne

$$(6. 3) \quad \frac{d}{dX} \left( \frac{1}{S} \right) = -\frac{1}{S^2} \frac{dS}{dX}.$$

Par récurrence, on définit les *dérivées successives* d'une série formelle. Si  $S(X) = \sum a_n X^n$ , la dérivée d'ordre n est

$$S^{(n)}(X) = n! a_n + \text{des termes de degré } \geq 1.$$

On a donc

$$(6. 4) \quad S^{(n)}(0) = n! a_n$$

en notant  $S^{(n)}(0)$  le résultat de la substitution de la série 0 à la lettre X dans  $S^{(n)}(X)$ .

## 7. SÉRIES RÉCIPROQUES

La série  $I(X)$  définie par  $I(X) = X$  est un *élément neutre* pour la composition des séries formelles :

$$S \circ I = S = I \circ S.$$

**PROPOSITION 7. 1.** *Soit donnée une série formelle S; pour qu'il existe une série formelle T telle que*

$$(7. 1) \quad T(0) = 0, \quad S \circ T = I,$$

*il faut et il suffit que*

$$(7. 2) \quad S(0) = 0, \quad S'(0) \neq 0.$$

*S'il en est ainsi, T est unique, et l'on a  $T \circ S = I$ ; autrement dit, T est l'inverse de S pour la loi de composition  $\circ$ .*

*Démonstration.* Soit  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ,  $T(Y) = \sum_{n \geq 1} b_n Y^n$ . Si l'on a

$$(7. 3) \quad S(T(Y)) = Y,$$

l'identification donne

$$(7. 4) \quad a_0 = 0, \quad a_1 b_1 = 1.$$

Donc les conditions (7. 2) sont nécessaires.

Supposons-les remplies; écrivons que le coefficient de  $Y^n$  est nul dans le premier membre (7. 3); il est égal au coefficient de  $Y^n$  dans

$$a_1 T(Y) + a_2 (T(Y))^2 + \dots + a_n (T(Y))^n,$$

ce qui donne la relation

$$(7. 5) \quad a_1 b_n + P_n(a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}) = 0,$$

où  $P_n$  est un polynôme connu à coefficients entiers  $\geq 0$ , linéaire en  $a_2, \dots, a_n$ . Puisque  $a_1 \neq 0$ , la deuxième relation (7. 4) permet de calculer  $b_1$ ; puis, pour  $n \geq 2$ , la relation (7. 5) permet de calculer  $b_n$  par récurrence sur  $n$ . D'où l'existence et l'unicité de la série formelle  $T(Y)$ .

La série ainsi obtenue satisfait à  $T(0) = 0$ ,  $T'(0) \neq 0$ ; donc, en appliquant à  $T$  le résultat qu'on vient de démontrer pour  $S$ , on voit qu'il existe une série formelle  $S_1$  telle que

$$S_1(0) = 0, \quad T \circ S_1 = I.$$

On a

$$S_1 = I \circ S_1 = (S \circ T) \circ S_1 = S \circ (T \circ S_1) = S \circ I = S.$$

Ainsi  $S_1$  n'est autre que  $S$ , et on a bien  $T \circ S = I$ , ce qui achève la démonstration.

*Commentaire.* Puisque  $S(T(Y)) = Y$ ,  $T(S(X)) = X$ , on peut dire que les « transformations formelles »

$$Y = S(X), \quad X = T(Y)$$

sont réciproques l'une de l'autre; aussi donne-t-on à  $T$  le nom de « série formelle réciproque » de la série  $S$ .

La proposition 7. 1 est une sorte de « théorème des fonctions implicites formelles ».

## 2. Séries entières convergentes

### 1. CORPS COMPLEXE

Désormais le corps  $K$  sera l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ :  $\mathbb{R}$  désigne le corps des nombres réels,  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes.

Rappelons qu'un nombre complexe  $z = x + iy$  ( $x$  et  $y$  réels) se représente par un point du plan  $\mathbb{R}^2$ , de coordonnées  $x$  et  $y$ . Si à chaque  $z = x + iy$  on associe le nombre « conjugué »  $\bar{z} = x - iy$ , on définit un automorphisme  $z \rightarrow \bar{z}$  du corps  $\mathbb{C}$ , en vertu des relations

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'.$$

Le conjugué de  $\bar{z}$  est  $z$ . Autrement dit, la transformation  $z \rightarrow \bar{z}$  est *involutive*, c'est-à-dire égale à la transformation réciproque.

On définit la *norme*, ou *valeur absolue*, ou encore *module* d'un nombre complexe  $z$  comme suit :

$$|z| = (z \cdot \bar{z})^{1/2}.$$

Elle jouit des propriétés suivantes :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|, \quad |zz'| = |z| \cdot |z'|, \quad |1| = 1.$$

La norme  $|z|$  est toujours  $\geq 0$  et n'est nulle que si  $z = 0$ . Cette norme permet de définir une *distance* dans le corps  $\mathbb{C}$  : la distance de  $z$  à  $z'$  est  $|z - z'|$ ; ce n'est pas autre chose que la distance euclidienne dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Pour cette distance,  $\mathbb{C}$  est un espace *complet*, ce qui signifie que le *critère de Cauchy* est valable : pour qu'une suite de points  $z_n \in \mathbb{C}$  ait une limite, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} |z_m - z_n| = 0.$$

Ce critère de Cauchy a pour conséquence le théorème bien connu : si une série  $\sum_n u_n$  de nombres complexes est telle que  $\sum_n |u_n| < +\infty$ , alors la série converge (on dit que la série est *absolument convergente*). De plus

$$\left| \sum_n u_n \right| \leq \sum_n |u_n|.$$

On identifiera toujours  $\mathbb{R}$  à un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , à savoir le sous-corps formé des  $z$  tels que  $\bar{z} = z$ . La norme induit une norme sur  $\mathbb{R}$ , qui n'est autre que la valeur absolue d'un nombre réel.  $\mathbb{R}$  est complet. Dans toute la suite la norme du corps  $\mathbb{C}$  (ou  $\mathbb{R}$ ) jouera un rôle essentiel.

On notera

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

la « partie réelle » et le « coefficient imaginaire » de  $z \in \mathbb{C}$ .

## 2. RAPPEL DE NOTIONS CONCERNANT LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE FONCTIONS

(En ce qui concerne les notions qui interviennent ici, le lecteur pourra se reporter au Cours de Mathématiques I de J. Dixmier : Cours de l'A.C.E.S., Topologie, chapitre VI, § 9.)

Considérons des fonctions définies sur un ensemble  $E$ , à valeurs réelles ou complexes (on pourrait, plus généralement, considérer des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet; cf. loc. cit.). Pour chaque fonction  $u$  on notera

$$\|u\| = \sup_{x \in E} |u(x)|,$$

qui est un nombre  $\geq 0$  éventuellement infini. On a évidemment :

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$$

pour tout scalaire  $\lambda$ , lorsque  $\|u\| < +\infty$ ; autrement dit, sur l'espace vectoriel des fonctions  $u$  telles que  $\|u\| < +\infty$ ,  $\|u\|$  est une *norme*.

On dit qu'une série de fonction  $u_n$  est *normalement convergente* si la série des normes  $\sum_n \|u_n\|$  est une série convergente à termes positifs; autrement dit, si  $\sum_n \|u_n\| < +\infty$ . Cela implique que, pour chaque  $x \in E$ , la série  $\sum_n u_n(x)$  est convergente, donc que la série  $\sum_n u_n(x)$  est absolument convergente; de plus si  $v(x)$  désigne la somme de cette dernière série, on a

$$\|v\| \leq \sum_n \|u_n\|, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left\| v - \sum_{n=0}^p u_n \right\| = 0.$$

Cette dernière relation exprime que les sommes partielles  $\sum_{n=0}^p u_n$  convergent *uniformément* vers  $v$  quand  $p$  tend vers l'infini. Ainsi, *toute série normalement convergente est uniformément convergente*.

Si  $A$  est un sous-ensemble de  $E$ , on dit que la série de terme général  $u_n$  converge normalement pour  $x \in A$  si la série des fonctions

$$u'_n = u_n|_A \quad (\text{restriction de } u_n \text{ à } A)$$

converge normalement. Il revient au même de dire qu'on peut majorer sur  $A$  chaque  $|u_n(x)|$  par une constante  $\varepsilon_n \geq 0$ , de manière que la série  $\sum_n \varepsilon_n$  soit convergente.

Rappelons que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues (sur un espace topologique  $E$ ) est continue. En particulier, *la somme d'une série normalement convergente de fonctions continues est continue*. On en déduit notamment ceci :

**PROPOSITION 1.2.** *Supposons que, pour chaque  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$  existe; soit  $a_n$  la valeur de cette limite. Alors si la série  $\sum_n u_n$  est normalement convergente, la série  $\sum_n a_n$  est convergente, et on a*

$$\sum_n a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum_n u_n(x) \right)$$

(intersion de la sommation et du passage à la limite).

Tout ce qui précède s'étend aux séries multiples, et plus généralement aux familles sommables de fonctions (cf. Cours de Dixmier cité plus haut).



## 3. RAYON DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Toutes les séries entières qu'on va considérer auront leurs coefficients dans l'un des corps  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

Signalons tout de même que ce qui suit resterait valable plus généralement pour un corps *valué complet non discret*, c'est-à-dire un corps  $K$  muni d'une application  $x \rightarrow |x|$  de  $K$  dans l'ensemble des nombres réels  $\geq 0$ , telle que

$$\begin{cases} |x + y| \leq |x| + |y|, & |xy| = |x| \cdot |y|, \\ |x| = 0 \iff x = 0, \end{cases}$$

et telle enfin qu'il existe des  $x \neq 0$  avec  $|x| \neq 1$ .

Soit  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  une série formelle à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On se propose de substituer à la lettre  $X$  un élément  $z$  du corps; cela donnera à la série une « valeur »  $S(z)$ , qui sera un élément du corps; mais une telle substitution exige que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  soit convergente. En fait on se bornera au cas où elle est *absolument convergente*.

D'une façon précise, introduisons une variable  $r$  réelle et  $\geq 0$ , et considérons la série à termes positifs (ou nuls)

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n,$$

dite *série associée* à la série  $S(X)$ . Sa somme est un nombre  $\geq 0$  bien déterminé, éventuellement infini. L'ensemble des  $r \geq 0$  pour lesquels

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < +\infty$$

est évidemment un intervalle de la demi-droite  $\mathbb{R}^+$ , et cet intervalle n'est pas vide puisque la série converge pour  $r = 0$ . Cet intervalle peut être ouvert à droite ou fermé, fini ou infini, et il peut se réduire au seul point 0. Dans tous les cas, soit  $\rho$  la borne supérieure de cet intervalle:  $\rho$  est un nombre  $\geq 0$ , fini ou infini, éventuellement nul. On l'appelle le *rayon de convergence* de la série entière formelle  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ . L'ensemble des  $z$  tels que  $|z| < \rho$  s'appelle le *disque de convergence* de la série entière; c'est un ensemble ouvert; il est vide si  $\rho = 0$ . C'est vraiment un disque lorsque le corps des coefficients est le corps complexe  $\mathbb{C}$ .

## PROPOSITION 3. 1.

a) pour tout  $r < \rho$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge normalement pour  $|z| \leq r$ ; en particulier, la série converge absolument pour chaque  $z$  tel que  $|z| < \rho$ ;

b) la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  diverge pour  $|z| > \rho$  (on n'affirme rien pour  $|z| = \rho$ ).

*Démonstration.* La proposition 3. 1 va résulter du

LEMME D'ABEL. Soient des nombres réels  $r$  et  $r_0$  tels que  $0 < r < r_0$ . S'il existe un nombre fini  $M > 0$  tel que

$$|a_n|(r_0)^n \leq M \quad \text{pour tout entier } n \geq 0,$$

alors la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge normalement pour  $|z| \leq r$ .

En effet on a  $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M(r/r_0)^n$ , et  $\epsilon_n = M(r/r_0)^n$  est le terme général d'une série convergente, à savoir une progression géométrique de raison  $r/r_0 < 1$ .

Démontrons maintenant l'assertion a) de la proposition 3. 1 : si  $r < \rho$ , prenons  $r_0$  tel que  $r < r_0 < \rho$ ; puisque la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n|(r_0)^n$  converge, son terme général est majoré par un nombre fixe  $M$ , et le lemme d'Abel assure la convergence normale de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  pour  $|z| \leq r$ . Il reste à prouver l'assertion b) : si  $|z| > \rho$ , il existe des entiers  $n$  tels que  $|a_n z^n|$  soit arbitrairement grand, sinon en vertu du lemme d'Abel, la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n| r'^n$  serait convergente pour un  $r'$  tel que  $\rho < r' < |z|$ , ce qui contredirait la définition de  $\rho$ .

*Expression du rayon de convergence* (Hadamard) : on va démontrer la formule

$$(3. 1) \quad 1/\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Pour cela, rappelons d'abord la définition de la limite supérieure d'une suite de nombres réels  $u_n$  :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sup_{n \geq p} u_n \right).$$

Pour démontrer (3. 1), on utilise le critère de convergence classique : soit une suite de nombres  $v_n \geq 0$ ; si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (v_n)^{1/n} < 1$ , on a  $\sum_n v_n < +\infty$ , et si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (v_n)^{1/n} > 1$ , on a  $\sum_n v_n = +\infty$  (« règle de Cauchy », qui résulte de la comparaison de la série  $\sum_n v_n$  à une progression géométrique). Ici on a  $v_n = |a_n| r^n$ , et par suite

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (v_n)^{1/n} = r \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right),$$

donc la série  $\sum_n |a_n| r^n$  converge pour  $1/r > \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$ , et diverge pour  $1/r < \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$ . Ceci prouve (3. 1).

*Quelques exemples.* — La série  $\sum_{n \geq 0} n! z^n$  a un rayon de convergence nul;  
 — la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$  a un rayon de convergence infini;  
 — chacune des séries  $\sum_{n \geq 0} z_{c_n}^n, \sum_{n > 0} \frac{1}{n} z^n, \sum_{n > 0} \frac{1}{n^2} z^n$  a un rayon de convergence égal à 1. On vérifiera qu'elles se comportent différemment pour  $|z| = 1$ .

4. ADDITION ET MULTIPLICATION DES SÉRIES ENTIÈRES CONVERGENTES

PROPOSITION 4. 1 : Soient  $A(X)$  et  $B(X)$  deux séries entières formelles dont le rayon de convergence soit  $\geq \rho$ . Soient

$$S(X) = A(X) + B(X) \quad \text{et} \quad P(X) = A(X) \cdot B(X)$$

leur somme et leur produit. Alors :

- a) les séries  $S(X)$  et  $P(X)$  ont un rayon de convergence  $\geq \rho$ ;
- b) on a de plus, pour  $|z| < \rho$ ,

$$(4. 1) \quad S(z) = A(z) + B(z), \quad P(z) = A(z)B(z).$$

*Démonstration.* Soient

$$A(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n, \quad B(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n, \quad S(X) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n, \quad P(X) = \sum_{n \geq 0} d_n X^n.$$

Posons

$$\gamma_n = |a_n| + |b_n|, \quad \delta_n = \sum_{0 \leq p \leq n} |a_p| \cdot |b_{n-p}|.$$

On a  $|c_n| \leq \gamma_n, |d_n| \leq \delta_n$ . Si  $r < \rho$ , les séries  $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$  et  $\sum_{n \geq 0} |b_n| r^n$  convergent, donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \gamma_n r^n &= \left( \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n \right) + \left( \sum_{n \geq 0} |b_n| r^n \right) < + \infty, \\ \sum_{n \geq 0} \delta_n r^n &= \left( \sum_{p \geq 0} |a_p| r^p \right) \cdot \left( \sum_{q \geq 0} |b_q| r^q \right) < + \infty. \end{aligned}$$

Donc les séries  $\sum_{n \geq 0} |c_n| r^n$  et  $\sum_{n \geq 0} |d_n| r^n$  convergent; ainsi tout  $r < \rho$  est au plus égal au rayon de convergence de chacune des séries  $S(X)$  et  $P(X)$ . Donc ces deux rayons de convergence sont  $\geq \rho$ .

Il reste à prouver les deux relations (4. 1). La première est évidente, et la seconde résulte de la multiplication des séries convergentes; d'une façon précise, on a une proposition classique que nous rappelons ici :

PROPOSITION 4. 2. Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries absolument convergentes. Si on pose

$$w_n = \sum_{0 \leq p \leq n} u_p v_{n-p}$$

la série  $\sum_{n \geq 0} w_n$  est absolument convergente, et sa somme est égale au produit

$$\left( \sum_{p \geq 0} u_p \right) \cdot \left( \sum_{q \geq 0} v_q \right).$$

Posons en effet  $\alpha_p = \sum_{n \geq p} |u_n|$ ,  $\beta_q = \sum_{n \geq q} |v_n|$ ; on a

$$\sum_{n \geq 0} |w_n| \leq \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} |u_p| \cdot |v_q| = \alpha_0 \beta_0;$$

de plus, si  $m \geq 2n$ ,

$$\sum_{k \leq m} w_k = \left( \sum_{k \leq n} u_k \right) \cdot \left( \sum_{k \leq n} v_k \right)$$

est majoré par une somme de termes  $|u_p| \cdot |v_q|$  pour chacun desquels l'un au moins des entiers  $p$  et  $q$  est  $> n$ ; donc cette somme est majorée par  $\alpha_0 \beta_{n-1} + \beta_0 \alpha_{n+1}$ , et elle tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Donc  $\sum_{k \leq m} w_k$  tend vers le produit des sommes infinies  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$ .

#### 5. SUBSTITUTION D'UNE SÉRIE ENTIÈRE CONVERGENTE DANS UNE AUTRE

Soient données deux séries entières formelles  $S$  et  $T$  avec  $T(0) = 0$ ; on a, au paragraphe 1, n° 4, défini la série entière formelle  $S \circ T$ .

**PROPOSITION 5. 1.** Posons  $T(X) = \sum_{n \geq 1} b_n X^n$ . Si les rayons de convergence  $\rho(S)$  et  $\rho(T)$  sont  $\neq 0$ , il en est de même du rayon de convergence de  $U = S \circ T$ . D'une façon précise, il existe des  $r > 0$  tels que  $\sum_{n \geq 1} |b_n| r^n < \rho(S)$ ; si  $r$  est ainsi choisi, le rayon de convergence de  $U$  est  $\geq r$ , et, pour tout  $z$  tel que  $|z| \leq r$ , on a

$$|T(z)| < \rho(S)$$

et

$$(5. 1) \quad S(T(z)) = U(z).$$

*Démonstration.* Posons  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ . Pour  $r > 0$  assez petit,  $\sum_{n \geq 1} |b_n| r^n$  est fini puisque le rayon de convergence de  $T$  est  $\neq 0$ . Donc  $\sum_{n \geq 1} |b_n| r^{n-1}$  est fini pour  $r > 0$  assez petit, et par suite

$$\sum_{n \geq 1} |b_n| r^n = r \cdot \left( \sum_{n \geq 1} |b_n| r^{n-1} \right)$$

tend vers 0 quand  $r$  tend vers 0. Il existe donc bien un  $r > 0$  tel que  $\sum_{n \geq 1} |b_n| r^n < \rho(S)$ . Alors

$$\sum_{p \geq 0} |a_p| \left( \sum_{k \geq 1} |b_k| r^k \right)^p$$

est fini. Or ceci est une série  $\sum_{n \geq 0} \gamma_n r^n$ , et si on pose  $U(X) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n$ , on a évidemment  $|c_n| \leq \gamma_n$ . Ainsi  $\sum_{n \geq 0} |c_n| r^n$  est fini, et le rayon de convergence de  $U$  est  $\geq r$ .

Il reste à prouver la relation (5. 1). Posons  $S_n(X) = \sum_{n \leq k \leq n} a_k X^k$ , et soit  $S_n \circ T = U_n$ . Pour  $|z| \leq r$ , on a

$$U_n(z) = S_n(T(z)),$$

puisque l'application  $T \rightarrow T(z)$  est un homomorphisme d'anneaux et que  $S_n$  est un polynôme. Puisque la série  $S$  converge au point  $T(z)$ , on a

$$S(T(z)) = \lim_n S_n(T(z)).$$

D'autre part, les coefficients de  $U - U_n = (S - S_n) \circ T$  sont majorés par ceux de

$$\sum_{p > n} |a_p| \left( \sum_{k \geq 1} |b_k| r^k \right)^p,$$

série dont la somme tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Il s'ensuit que, pour  $|z| \leq r$ ,  $U(z) - U_n(z)$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . On a donc finalement

$$U(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(T(z)) = S(T(z)) \quad \text{pour } |z| \leq r,$$

ce qui établit la relation (5. 1) et achève la démonstration.

*Interprétation de la relation (5. 1) :* supposons  $r$  choisi comme il est dit dans l'énoncé de la proposition 5. 1. Notons  $\hat{T}$  la fonction  $z \rightarrow T(z)$  définie pour  $|z| \leq r$ , et notons de même  $\hat{S}$  et  $\hat{U}$  les fonctions définies par les séries  $S$  et  $U$ . La relation (5. 1) dit que, pour  $|z| \leq r$ , l'application composée  $\hat{S} \circ \hat{T}$  est définie, et égale à  $\hat{U}$ . Ainsi la relation  $U = S \circ T$  entre séries formelles entraîne, lorsque les rayons de convergence de  $S$  et de  $T$  sont  $\neq 0$ , la relation  $\hat{U} = \hat{S} \circ \hat{T}$ , à condition de ne considérer que des valeurs assez petites de la variable  $z$ .

## 6. INVERSE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE CONVERGENTE

On sait (§ 1, proposition 5. 1) que si  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ , avec  $a_0 \neq 0$ , il existe une série formelle  $T(X)$  et une seule telle que le produit  $S(X)T(X)$  soit égal à 1.

**PROPOSITION 6. 1.** *Si le rayon de convergence de  $S$  est  $\neq 0$ , il en est de même du rayon de convergence de la série  $T$  telle que  $ST = 1$ .*

*Démonstration.* En multipliant  $S(X)$  par une constante convenable, on se ramène au cas où  $a_0 = 1$ . Posons alors  $S(X) = 1 - U(X)$ , avec  $U(0) = 0$ . La série inverse  $T(X)$  s'obtient par substitution de  $U(X)$  à  $Y$  dans la série  $1 + \sum_{n>0} Y^n$ ; or cette dernière série a un rayon de convergence égal à 1, donc  $\neq 0$ ; la proposition 6.1 résulte alors de la proposition 5.1.

## 7. DÉRIVATION D'UNE SÉRIE ENTIÈRE CONVERGENTE

PROPOSITION 7.1. Soit  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  une série entière formelle, et soit

$$S'(X) = \sum_{n \geq 0} n a_n X^{n-1}$$

la série dérivée (cf. § 1, n° 6). Les séries  $S$  et  $S'$  ont le même rayon de convergence. De plus si ce rayon de convergence  $\rho$  est  $\neq 0$ , on a, pour  $|z| < \rho$ ,

$$(7.1) \quad S'(z) = \lim_h \frac{S(z+h) - S(z)}{h}$$

lorsque  $h$  tend vers 0 par valeurs  $\neq 0$ .

*Remarque préliminaire.* Si  $|z| < \rho$ , on a aussi  $|z+h| < \rho$  pour  $h$  assez petit (à savoir, pour  $|h| < \rho - |z|$ ); donc  $S(z+h)$  est défini. D'autre part dans la relation (7.1), il est entendu que  $h$  tend vers 0 par valeurs réelles  $\neq 0$  si le corps des coefficients est le corps  $\mathbb{R}$ , par valeurs complexes  $\neq 0$  si le corps des coefficients est le corps  $\mathbb{C}$ . Dans le cas du corps  $\mathbb{R}$ , la relation (7.1) exprime que la fonction  $z \rightarrow S(z)$  a une dérivée égale à  $S'(z)$ ; dans le cas du corps complexe  $\mathbb{C}$ , la relation (7.1) montre qu'on a aussi une notion de dérivée par rapport à la variable complexe  $z$ . Dans tous les cas l'existence d'une fonction dérivée  $S'(z)$  implique évidemment que la fonction  $S(z)$  est continue pour  $|z| < \rho$ , ce qui peut d'ailleurs se montrer directement.

*Démonstration de la proposition 7.1.* Posons  $|a_n| = \alpha_n$ , et appelons  $\rho$  et  $\rho'$  les rayons de convergence des séries  $S$  et  $S'$ . Si  $r < \rho'$ , la série  $\sum_{n \geq 0} n \alpha_n r^{n-1}$  converge, donc

$$\sum_{n \geq 1} \alpha_n r^n \leq r \left( \sum_{n \geq 0} n \alpha_n r^{n-1} \right) < +\infty,$$

et par suite  $r \leq \rho$ . Inversement, soit  $r$  un nombre  $< \rho$ ; prenons un tel que  $r < r' < \rho$ ; on a

$$n \alpha_n r^{n-1} = \frac{1}{r'} (\alpha_n r'^n) \cdot n \left( \frac{r}{r'} \right)^{n-1};$$

puisque  $r' < \rho$ , il existe un  $M > 0$  (fini) tel que  $a_n r'^n \leq M$  pour tout  $n$ , d'où

$$n a_n r^{n-1} \leq \frac{M}{r'} n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1},$$

et comme la série  $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$  converge, la série  $\sum_{n \geq 1} n a_n r^{n-1}$  converge; donc  $r \leq \rho'$ . Ainsi tout nombre  $< \rho'$  est  $\leq \rho$ , et tout nombre  $< \rho$  est  $\leq \rho'$ ; d'où  $\rho = \rho'$ .

Il reste à prouver la relation (7. 1). Fixons  $z$  de manière que  $|z| < \rho$ , choisissons un  $r$  tel que  $|z| < r < \rho$ , et supposons désormais

$$(7. 2) \quad 0 \neq |h| \leq r - |z|.$$

Alors  $S(z + h)$  est défini et on a

$$(7. 3) \quad \frac{S(z + h) - S(z)}{h} - S'(z) = \sum_{n \geq 1} u_n(z, h),$$

où l'on a posé

$$u_n(z, h) = a_n \{ (z + h)^{n-1} + z(z + h)^{n-2} + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1} \}.$$

Puisque  $|z|$  et  $|z + h|$  sont  $\leq r$ , on a  $|u_n(z, h)| \leq 2n a_n r^{n-1}$ ; puisque  $r < \rho$ , on a  $\sum_{n \geq 1} n a_n r^{n-1} < +\infty$ ; donc, étant donné  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que

$$\sum_{n > n_0} 2n a_n r^{n-1} \leq \varepsilon/2.$$

Ayant ainsi choisi  $n_0$ , la somme finie  $\sum_{n \leq n_0} u_n(z, h)$  est un polynôme en  $h$ , nul pour  $h = 0$ ; donc dès que  $|h|$  est inférieur à un nombre  $\eta$  convenable, on a  $\left| \sum_{n \leq n_0} u_n(z, h) \right| \leq \varepsilon/2$ . Finalement, si  $h$  satisfait à (7. 2) et à  $|h| \leq \eta$ , on déduit de (7. 3) que

$$\left| \frac{S(z + h) - S(z)}{h} - S'(z) \right| \leq \left| \sum_{n \leq n_0} u_n(z, h) \right| + \sum_{n > n_0} 2n a_n r^{n-1} \leq \varepsilon.$$

Donc la relation (7. 1) est démontrée.

*Remarque.* On peut montrer que la convergence de  $\frac{S(z + h) - S(z)}{h}$  vers  $S'(z)$  a lieu *uniformément* par rapport à  $z$  lorsque  $|z| \leq r$  ( $r$  étant un nombre fixe strictement inférieur au rayon de convergence  $\rho$ ).

## 8. CALCUL DES COEFFICIENTS D'UNE SÉRIE ENTIÈRE.

Soit  $S(X)$  une série entière formelle dont le rayon de convergence soit  $\neq 0$ . Soit  $S(z)$  la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  pour  $|z| < \rho$ . C'est une fonction qui admet pour dérivée la fonction  $S'(z) = \sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}$ . A la série  $S'$  on peut de nouveau appliquer la proposition (7. 1); donc  $S'(z)$  admet à son tour, pour  $|z| < \rho$ , une fonction dérivée  $S''(z)$ , somme de la série entière  $\sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n z^{n-2}$ , série qui a le même rayon de convergence  $\rho$ . Et ainsi de suite. Par récurrence on voit que  $S(z)$  est une fonction *indéfiniment dérivable* pour  $|z| < \rho$ ; sa dérivée d'ordre  $n$  est

$$S^{(n)}(z) = n! a_n + T_n(z),$$

où  $T_n$  est une série d'ordre  $\geq 1$ , autrement dit  $T_n(0) = 0$ . D'où :

$$(8. 1) \quad a_n = \frac{1}{n!} S^{(n)}(0).$$

Cette formule fondamentale montre notamment que si l'on connaît la fonction  $S(z)$  dans le voisinage de 0 (si petit soit-il), les coefficients  $a_n$  de la série entière  $S$  sont entièrement déterminés. En conséquence :

Étant donnée une fonction  $f(z)$  définie pour  $|z|$  assez petit, il existe *au plus une série entière formelle*  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  dont le rayon de convergence soit  $\neq 0$ , et telle que l'on ait  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  pour  $|z|$  assez petit.

## 9. SÉRIE RÉCIPROQUE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE CONVERGENTE

Référons-nous à la proposition 7. 1 du § 1.

PROPOSITION 9. 1. Soit  $S$  une série entière telle que

$$S(0) = 0, \quad S'(0) \neq 0,$$

et soit  $T$  la série réciproque, c'est-à-dire la série telle que

$$T(0) = 0, \quad S \circ T = I.$$

Si le rayon de convergence de  $S$  est  $\neq 0$ , il en est de même de celui de  $T$ .

Le lecteur pourra admettre sans démonstration cette proposition, puisqu'une démonstration (dont le principe ne repose pas sur la théorie des séries entières convergentes) sera donnée plus loin (chap. IV, § 5, proposition 6. 1).



Voici néanmoins, pour le lecteur curieux, une démonstration directe qui se situe dans le cadre de la théorie des séries entières. Elle fait appel à la notion de « série majorante » (cf. Chap. VII). Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 7. 1 du § 1, et considérons les relations (7. 5) de ce paragraphe, qui permettent de calculer les coefficients inconnus  $b_n$  de la série cherchée  $T(X)$ . A côté de la série  $S(X)$ , considérons une série « majorante », c'est-à-dire une série

$$\bar{S}(X) = A_1 X - \sum_{n \geq 2} A_n X^n$$

à coefficients  $A_n > 0$  tels que  $|a_n| \leq A_n$  pour tout  $n$ ; nous supposons de plus que  $A_1 = |a_1|$ . A la série  $S$  la proposition 7. 1 du § 1 associe une série

$$\bar{T}(Y) = \sum_{n \geq 1} B_n Y^n$$

telle que  $\bar{S}(\bar{T}(Y)) = Y$ ; ses coefficients  $B_n$  sont donnés par les relations

$$(9. 1) \quad A_1 B_n + P_n(A_2, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}) = 0$$

analogues à (7. 5) du § 1. On en déduit, par récurrence sur  $n$ :

$$(9. 2) \quad |b_n| \leq B_n.$$

Il s'ensuit que le rayon de convergence de la série  $T$  est au moins égal à celui de la série  $\bar{T}$ . On va montrer que ce dernier est  $> 0$ , ce qui démontrera la proposition 9. 1.

Pour cela, nous choisissons la série  $\bar{S}$  comme suit: soit  $r > 0$  un nombre strictement inférieur au rayon de convergence de la série  $S$  (par hypothèse, ce rayon de convergence est  $\neq 0$ ); le terme général de la série  $\sum_{n \geq 1} |a_n| r^n$  est donc majoré par un nombre fini  $M > 0$ , et si l'on pose

$$(9. 3) \quad A_1 = |a_1|, \quad A_n = M/r^n \quad \text{pour } n \geq 2,$$

on obtient les coefficients d'une série majorante de  $S$ ; sa somme  $\bar{S}(x)$  est égale à

$$\bar{S}(x) = A_1 x - \frac{M}{1-x/r^2} \quad \text{pour } |x| < r.$$

Cherchons une fonction  $\bar{T}(y)$ , définie pour les valeurs assez petites de  $y$ , nulle pour  $y = 0$ , et telle que  $\bar{S}(\bar{T}(y)) = y$  identiquement;  $\bar{T}(y)$  doit être solution de l'équation du second degré

$$(9. 4) \quad (A_1/r + M/r^2)\bar{T}^2 - (A_1 + y/r)\bar{T} + y = 0,$$

qui admet pour solution (s'annulant pour  $y = 0$ ):

$$\bar{T}(y) = \frac{A_1 + y/r - \sqrt{(A_1)^2 - 2A_1 y/r - 4M y/r^2 + y^2/r^2}}{2(A_1/r + M/r^2)}.$$

Lorsque  $|y|$  est assez petit, le radical est de la forme  $A_1 \sqrt{1 \pm u}$ , avec  $u < 1$ , donc  $\bar{T}(y)$  admet un développement en série entière en  $y$ , qui converge pour  $|y|$  assez petit. Ainsi le rayon de convergence de cette série est  $\neq 0$ , ce qu'il fallait démontrer.

### 3. Fonction exponentielle et fonction logarithmique

#### 1. FONCTION EXPONENTIELLE

On a déjà dit (§ 2, n° 3) que la série formelle  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n$  a un rayon de convergence infini. Pour  $z$  complexe, on définit

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n,$$

somme d'une série absolument convergente. Cette fonction admet une dérivée

$$(1. 1) \quad \frac{d}{dz} (e^z) = e^z$$

d'après la proposition 7. 1 du § 2.

D'autre part, en appliquant la proposition 4. 2 du § 2 aux deux séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n!} z^n, \quad v_n = \frac{1}{n!} z'^n,$$

on obtient

$$w_n = \sum_{0 \leq p \leq n} \frac{1}{p!(n-p)!} z^p z'^{n-p} = \frac{1}{n!} (z + z')^n.$$

Par conséquent

$$(1. 2) \quad e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$$

(propriété fonctionnelle fondamentale de la fonction exponentielle). En particulier

$$(1. 3) \quad e^z \cdot e^{-z} = 1, \quad \text{donc} \quad e^z \neq 0 \quad \text{pour tout } z.$$

Posons  $z = x + iy$  ( $x$  et  $y$  réels); on a

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy},$$

et tout revient à étudier les deux fonctions  $e^x$  et  $e^{iy}$ , où  $x$  et  $y$  sont des variables réelles. On a

$$(1. 4) \quad \frac{d}{dx} (e^x) = e^x, \quad \frac{d}{dy} (e^{iy}) = ie^{iy}.$$

#### 2. FONCTION EXPONENTIELLE RÉELLE $e^x$

On a vu que  $e^x \neq 0$ ; mieux :  $e^x = (e^{x/2})^2 > 0$ .

De plus le développement  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$  montre que  $e^x > 1 + x$  pour  $x > 0$ .

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty;$$

en changeant  $x$  en  $-x$  on trouve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Ainsi  $e^x$  est une fonction de la variable réelle  $x$  qui croît strictement de 0 à  $+\infty$ . La transformation  $t \mapsto e^x$  possède donc une transformation réciproque, définie pour  $t > 0$ ; on la note

$$x = \log t.$$

C'est une fonction strictement croissante qui croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ . La relation fonctionnelle de  $e^x$  se traduit par

$$(2.1) \quad \log(t') = \log t + \log t',$$

et en particulier  $\log 1 = 0$ .

D'autre part, le théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque donne :

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt}(\log t) = 1/t.$$

Remplaçons  $t$  par  $1 + u$  ( $u > -1$ );  $\log(1 + u)$  est la primitive de  $\frac{1}{1+u}$  qui s'annule pour  $u = 0$ ; or on a le développement en série entière

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \dots + (-1)^{n-1}u^{n-1} + \dots$$

dont le rayon de convergence est égal à 1. D'après la proposition 7.1 du § 2, la série des primitives a même rayon de convergence et sa somme a pour dérivée  $\frac{1}{1+u}$ ; d'où, pour  $|u| < 1$ ,

$$(2.3) \quad \log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n} + \dots$$

(En réalité ce développement est aussi valable pour  $u = 1$ ).

Posons pour un instant

$$(2.4) \quad S(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} X^n, \quad T(Y) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{Y^n}{n},$$

et cherchons la série composée  $U = S \circ T$ . D'après la proposition 5.1 du § 2, on a, pour  $-1 < u < +1$ ,

$$U(u) = S(T(u));$$

or  $T(u) = \log(1+u)$ ,  $S(x) = e^x - 1$ , donc

$$U(u) = e^{1/(e^u-1)+u} - 1 = (1+u) - 1 = u.$$

Ceci prouve que la série formelle  $U$  n'est autre que  $I$ , en vertu de l'unicité d'un développement d'une fonction en série entière (cf. § 2, n° 8). Ainsi les séries  $S$  et  $T$  sont réciproques l'une de l'autre.

### 3. FONCTION EXPONENTIELLE IMAGINAIRE $e^{iy}$ ( $y$ RÉEL)

Le développement en série de  $e^{iy}$  montre que  $e^{-iy}$  est imaginaire conjugué de  $e^{iy}$ ; donc  $e^{iy} \cdot e^{-iy}$  est le carré du module de  $e^{iy}$ ; mais c'est égal à 1 d'après la relation (1. 3). Ainsi

$$|e^{iy}| = 1.$$

On voit que, dans le plan représentatif du corps  $\mathbb{C}$ , le point  $e^{iy}$  est sur le *cercle-unité*, lieu des points dont la distance à l'origine  $o$  est égale à 1. Les nombres complexes  $u$  tels que  $|u| = 1$  forment un *groupe*  $U$  pour la multiplication; et la propriété fonctionnelle

$$e^{i(y+z)} = e^{iy} \cdot e^{iz}$$

exprime ceci : l'application  $y \rightarrow e^{iy}$  est un homomorphisme du groupe additif  $\mathbb{R}$  dans le groupe multiplicatif  $U$ . On va étudier de plus près cet homomorphisme.

**THÉORÈME.** *L'homomorphisme  $y \rightarrow e^{iy}$  applique  $\mathbb{R}$  sur  $U$ , et son « noyau » (sous-groupe des  $y$  tels que  $e^{iy} = 1$ , élément neutre de  $U$ ) se compose de tous les multiples entiers d'un certain nombre réel  $> 0$ . Par définition, ce nombre se note  $2\pi$ .*

*Démonstration.* Introduisons la partie réelle et la partie imaginaire de  $e^{iy}$ ; on pose, par définition,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

ce qui définit deux fonctions réelles  $\cos y$  et  $\sin y$ , telles que

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1.$$

Ces fonctions sont développables en séries entières dont le rayon de convergence est infini :

$$(3. 1) \quad \begin{cases} \cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} + \dots, \\ \sin y = y - \frac{1}{3!}y^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1} + \dots. \end{cases}$$

On va étudier le sens de variation de ces fonctions. Observons que, en séparant le réel de l'imaginaire dans la deuxième relation (1. 4), on obtient

$$\frac{d}{dy}(\cos y) = -\sin y, \quad \frac{d}{dy}(\sin y) = \cos y.$$

Pour  $y = 0$ ,  $\cos y$  est égal à 1; puisque  $\cos y$  est une fonction continue, il existe un  $y_0 > 0$  tel que  $\cos y > 0$  pour  $0 \leq y \leq y_0$ . Donc  $\sin y$ , qui a pour dérivée  $\cos y$ , est strictement croissant dans l'intervalle  $[0, y_0]$ . Posons  $\sin y_0 = a > 0$ . On va montrer que  $\cos y$  s'annule pour une certaine valeur  $> 0$  de  $y$ . En effet, supposons que  $\cos y > 0$  pour  $y_0 \leq y \leq y_1$ ; on a

$$(3. 2) \quad \cos y_1 - \cos y_0 = - \int_{y_0}^{y_1} \sin y \, dy.$$

Or  $\sin y \geq a$ , puisque  $\sin y$  est croissant dans l'intervalle  $[y_0, y_1]$  où sa dérivée est  $> 0$ ; donc

$$\int_{y_0}^{y_1} \sin y \, dy \geq a(y_1 - y_0).$$

Portons ceci dans (3. 2) et observons que  $\cos y_1 > 0$ ; on trouve

$$y_1 - y_0 < \frac{1}{a} \cos y_0.$$

Ceci prouve que  $\cos y$  s'annule dans l'intervalle  $\left[ y_0, y_0 + \frac{1}{a} \cos y_0 \right]$ . Appelons  $\frac{\pi}{2}$  la plus petite valeur  $> 0$  de  $y$  pour laquelle  $\cos y = 0$  (ceci est une définition du nombre  $\pi$ ). Dans l'intervalle  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ ,  $\cos y$  décroît strictement de 1 à 0, et  $\sin y$  croît strictement de 0 à 1; donc l'application  $y \rightarrow e^{iy}$  applique bijectivement l'intervalle compact  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  sur l'ensemble des points  $(u, v)$  du cercle-unité dont l'abscisse  $u$  et l'ordonnée  $v$  sont  $\geq 0$ . En vertu d'un théorème de topologie concernant une application continue et bijective d'un espace compact, on obtient le :

LEMME. L'application  $y \rightarrow e^{iy}$  est un homéomorphisme de  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  sur la partie du cercle-unité  $u^2 + v^2 = 1$  située dans le quart de plan  $u \geq 0, v \geq 0$ .

Pour  $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$ , on a  $e^{iy} = ie^{i(y-\frac{\pi}{2})}$ , d'où l'on déduit facilement que  $e^{iy}$  prend une fois et une seule toute valeur complexe de module 1 dont l'abscisse est  $\leq 0$  et l'ordonnée  $\geq 0$ .

Conclusions analogues pour les intervalles  $\left[ \pi, \frac{3\pi}{2} \right]$  et  $\left[ \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$ . Ainsi, pour

$0 \leq y < 2\pi$ ,  $e^{iy}$  prend une fois et une seule toute valeur complexe de module 1, tandis que  $e^{2i\pi} = 1$ . Ainsi la fonction  $e^{iy}$  est périodique de période  $2\pi$ , et l'application  $y \rightarrow e^{iy}$  applique  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{U}$ . Le théorème est démontré.

#### 4. MESURE DES ANGLES. ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE

Notons  $2\pi\mathbb{Z}$  le sous-groupe du groupe additif  $\mathbb{R}$  formé des multiples entiers du nombre  $2\pi$ . Par passage au quotient l'application  $y \rightarrow e^{iy}$  induit un *isomorphisme*  $\varphi$  du *groupe quotient*  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  sur le *groupe*  $\mathbb{U}$ . L'isomorphisme réciproque  $\varphi^{-1}$  de  $\mathbb{U}$  sur  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  associe à tout nombre complexe  $u$  tel que  $|u| = 1$  un nombre réel défini à l'addition près d'un multiple entier de  $2\pi$ ; on l'appelle l'*argument* de  $u$  et on le note  $\arg u$ . Par abus de notation, on note aussi  $\arg u$  l'un quelconque des nombres réels dont la classe modulo  $2\pi$  est l'argument de  $u$ ; la fonction  $\arg u$  est alors un exemple de « fonction multiforme », c'est-à-dire susceptible de plusieurs valeurs pour une valeur donnée de la variable  $u$ . Cette fonction résout le problème de la « mesure des angles » (en identifiant chaque angle au point de  $\mathbb{U}$  qui lui correspond) : la « mesure d'un angle » est un nombre réel qui n'est défini que modulo  $2\pi$ .

Sur le groupe quotient  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , mettons la *topologie quotient* de la topologie usuelle de la droite numérique  $\mathbb{R}$  : soit  $p$  l'application canonique de  $\mathbb{R}$  sur son quotient  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ; un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  sera dit *ouvert* si son image réciproque  $p^{-1}(A)$ , qui est un ensemble de points de  $\mathbb{R}$  invariant par la translation  $2\pi$ , est ensemble ouvert de  $\mathbb{R}$ . Il est immédiat que l'espace topologique  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  est séparé (autrement dit, deux points distincts possèdent deux voisinages ouverts disjoints). De plus, il est *compact*; en effet soit  $I$  l'intervalle fermé  $[0, 2\pi]$ ; l'application naturelle  $I \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  applique l'espace compact  $I$  sur l'espace séparé  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , qui est donc compact d'après un théorème classique de topologie. L'homomorphisme  $\varphi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}$  est continu. C'est une application bijective de l'espace compact  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  sur l'espace séparé  $\mathbb{U}$ ; donc  $\varphi$  est un *homéomorphisme* de  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{U}$ .

*Définition générale de l'argument* : pour tout nombre complexe  $t \neq 0$ , définissons l'*argument* de  $t$  par la formule

$$\arg t = \arg (t/|t|).$$

Le second membre est déjà défini puisque  $t/|t| \in \mathbb{U}$ . (On observera que l'argument de 0 n'est pas défini.) Comme plus haut,  $\arg t$  n'est défini qu'à l'addition près d'un multiple entier de  $2\pi$ . On a ainsi

$$(4.1) \quad t = |t|e^{i \arg t}$$

*Application.* Soit à résoudre l'équation  $t^n = a$  (où  $a \neq 0$  est donné). Elle équivaut à

$$|t| = |a|^{1/n}, \quad \arg t = \frac{1}{n} \arg a.$$

Elle possède  $n$  solutions complexes  $t$ , car on trouve pour  $\arg t$  un nombre réel défini à l'addition près d'un multiple entier de  $\frac{2\pi}{n}$ .

### 5. LOGARITHME COMPLEXE

Étant donné un nombre complexe  $t$ , cherchons tous les nombres complexes  $z$  tels que  $e^z = t$ . Il n'en existe que si  $t \neq 0$ . Dans ce cas, la relation (4. 1) montre que les  $z$  cherchés sont les nombres complexes de la forme

$$(5. 1) \quad \log |t| + i \arg t.$$

On pose, par définition,

$$(5. 2) \quad \log t = \log |t| + i \arg t.$$

C'est un nombre complexe défini à l'addition près d'un multiple entier de  $2\pi i$ . D'après cette définition, on a  $e^{\log t} = t$ . Lorsque  $t$  est réel et  $> 0$ , on retrouve la fonction classique  $\log t$ , si on se borne à prendre pour  $\arg t$  la valeur 0.

Quels que soient  $t$  et  $t'$  complexes  $\neq 0$ , et quelle que soient les valeurs choisies pour  $\log t$ ,  $\log t'$  et  $\log (tt')$ , on a

$$(5. 3) \quad \log (tt') = \log t + \log t' \pmod{2\pi i}.$$

*Déterminations du logarithme.* Jusqu'ici on n'a pas défini  $\log t$  comme une vraie fonction.

*Définition.* On dit qu'une fonction continue  $f(t)$  de la variable complexe  $t$ , définie dans un ouvert connexe  $D$  du plan  $\mathbb{C}$ , ne contenant pas le point  $t = 0$ , est une *détermination* de  $\log t$  si, pour tout  $t \in D$ , on a  $e^{f(t)} = t$  (autrement dit, si  $f(t)$  est l'une des valeurs possibles de  $\log t$ ).

On verra plus loin (chapitre II, § 1, n° 7) à quelle condition doit satisfaire l'ouvert  $D$  pour qu'il existe dans  $D$  une détermination de  $\log t$ . Dès maintenant, on va voir comment on peut obtenir toutes les déterminations de  $\log t$  s'il en existe une.

**PROPOSITION 5. 1.** *S'il existe une détermination  $f(t)$  de  $\log t$  dans l'ouvert connexe  $D$ , toute autre détermination est de la forme  $f(t) + 2k\pi i$  ( $k$  entier); réciproquement,  $f(t) + 2k\pi i$  est une détermination de  $\log t$  pour tout entier  $k$ .*

Supposons en effet que  $f(t)$  et  $g(t)$  soient deux déterminations de  $\log t$ . La différence

$$h(t) = \frac{f(t) - g(t)}{2\pi i}$$

est une fonction continue dans  $D$  et ne prend que des valeurs entières; puisque  $D$  a été supposé connexe, une telle fonction est nécessairement *constante*. En effet, l'ensemble des points  $t \in D$  tels que  $h(t)$  soit égal à un entier donné  $n$ , est ouvert et fermé. Donc cet ensemble est vide ou égal à  $D$ . La constante est forcément un entier. Que  $f(t) + 2k\pi i$  soit une détermination de  $\log t$  pour tout entier  $k$  est évident.

On définirait de même ce qu'il faut entendre par une détermination de  $\arg t$  dans un ouvert connexe  $D$  ne contenant pas l'origine. D'ailleurs toute détermination de  $\arg t$  définit une détermination, de  $\log t$ , et vice-versa.

*Exemple.* Prenons pour  $D$  le demi-plan ouvert  $\operatorname{Re}(t) > 0$  (rappelons qu'on note  $\operatorname{Re}(t)$  la partie réelle de  $t$ ). Pour tout  $t$  dans ce demi-plan, il y a une valeur et une seule de  $\arg t$  qui soit  $> -\frac{\pi}{2}$  et  $< \frac{\pi}{2}$ ; notons-la  $\operatorname{Arg} t$ . On va montrer que  $\operatorname{Arg} t$  est une *fonction continue*, et que par suite

$$\log |t| + i \operatorname{Arg} t$$

est une détermination de  $\log t$  dans le demi-plan  $\operatorname{Re}(t) > 0$ . On l'appellera la *détermination principale* de  $\log t$ .

Puisque  $\operatorname{Arg} t = \operatorname{Arg}(t/|t|)$  et que l'application  $t \rightarrow t/|t|$  est une application continue du demi-plan  $\operatorname{Re}(t) > 0$  sur l'ensemble des  $u$  tels que  $|u| = 1$  et  $\operatorname{Re}(u) > 0$ , il suffit de montrer que l'application  $y = \operatorname{Arg} u$  est continue. Or c'est l'application réciproque de  $u = e^{iy}$ ,  $y$  parcourant l'intervalle ouvert  $\left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$ ; la fonction  $u = e^{iy}$  est une application continue bijective de l'intervalle compact  $\left[ -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$  sur l'ensemble des  $u$  tels que  $|u| = 1$  et  $\operatorname{Re}(u) \geq 0$ ; c'est donc un homéomorphisme, et l'application réciproque est bien continue.

C.Q.F.D.

## 6. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DU LOGARITHME COMPLEXE

PROPOSITION 6. 1. *La somme de la série entière*

$$\Gamma(u) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n},$$

qui converge pour  $|u| < 1$ , est égale à la détermination principale de  $\log(1+u)$ .



Observons d'abord que si  $|u| < 1$ ,  $t = 1 + u$  reste dans un disque ouvert contenu dans le demi-plan  $\text{Re}(t) > 0$ . Reprenons alors les notations de la relation (2. 4), et rappelons que les séries S et T sont réciproques l'une de l'autre; la proposition 5. 1 du § 2 montre que l'on a  $S(T(u)) = u$  pour tout nombre complexe  $u$  tel que  $|u| < 1$ . Autrement dit,  $e^{T(u)} = 1 + u$ ; et par suite  $T(u)$  est une détermination de  $\log(1 + u)$ . Pour montrer que c'est la détermination principale, il suffit de vérifier qu'elle prend la même valeur que la détermination principale pour une valeur particulière de  $u$ , par exemple qu'elle est nulle pour  $u = 0$ . Or c'est évident sur le développement en série de  $T(u)$ .

PROPOSITION 6. 2. Si  $f(t)$  est une détermination de  $\log t$  dans un ouvert connexe D, la fonction  $f(t)$  admet une dérivée  $f'(t)$  par rapport à la variable complexe  $t$ , et on a

$$f'(t) = 1/t.$$

En effet pour  $h$  complexe  $\neq 0$  et assez petit, on a

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{f(t+h) - f(t)}{e^{f(t+h)} - e^{f(t)}},$$

lorsque  $h$  tend vers 0, ceci tend vers l'inverse de la limite de  $\frac{e^{z'} - e^z}{z' - z}$  pour  $z'$  tendant vers  $z = f(t)$ ; la limite cherchée est donc l'inverse de la valeur de la dérivée de  $e^z$  pour  $z = f(t)$ ; elle est donc égale à  $e^{-f(t)} = 1/t$ .

Remarque. A titre de vérification, la dérivée de la série entière  $T(u)$  est bien égale à  $\frac{1}{1+u}$ .

Définition. Pour tout couple de nombres complexes  $t \neq 0$  et  $\alpha$ , on pose

$$t^\alpha = e^{\alpha \log t}.$$

$\alpha$  étant fixé, c'est une fonction multiforme de  $t$ . On définit comme ci-dessus ce qu'on entend par une détermination de  $t^\alpha$ , dans un ouvert connexe D. Toute détermination de  $\log t$  dans D définit une détermination de  $t^\alpha$  dans D.

Revision. Ici le lecteur est prié de revoir, le cas échéant, les développements en série des fonctions usuelles : arc  $\text{tg } x$ , arc  $\sin x$ , etc. D'autre part, pour tout exposant complexe  $\alpha$ , on considère, pour  $x$  complexe tel que  $|x| < 1$ ,

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)}$$

où  $\log(1+x)$  désigne la détermination principale (la fonction  $(1+x)^\alpha$  prend donc la valeur 1 pour  $x = 0$ ); étudier le développement de cette fonction en série entière.

## 4. Fonctions analytiques d'une variable réelle ou complexe

## 1. DÉFINITIONS

*Définition 1. 1.* On dit qu'une fonction  $f(x)$ , définie au voisinage de  $x_0$ , est *développable en série entière* au point  $x_0$  s'il existe une série entière formelle

$S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  dont le rayon de convergence soit  $\neq 0$  et qui satisfasse à

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n \quad \text{pour } |x - x_0| \text{ assez petit.}$$

Cette définition s'applique aussi bien dans le cas où  $x$  est une variable réelle que dans le cas d'une variable complexe. La série  $S(X)$ , si elle existe, est *unique* d'après le n° 8 du § 2.

Si  $f(x)$  est développable en série entière au point  $x_0$ , la fonction  $f$  est indéfiniment dérivable dans un voisinage de  $x_0$ , puisqu'il en est ainsi de la somme d'une série entière. Si le produit  $fg$  de deux fonctions  $f$  et  $g$  développables en série entière au point  $x_0$  est identiquement nul dans un voisinage de  $x_0$ , alors l'une au moins des fonctions  $f$  et  $g$  est identiquement nulle au voisinage de  $x_0$ ; en effet cela résulte du fait que l'anneau des séries formelles est un anneau d'intégrité (§ 1, proposition 3. 1). Si  $f$  est développable en série entière au point  $x_0$ , il existe une fonction  $g$ , développable en série entière au point  $x_0$  et ayant une dérivée  $g' = f$  dans un voisinage de  $x_0$ ; une telle fonction  $g$  est unique à l'addition près d'une constante; il suffit, pour le voir, de considérer la série des primitives des termes du développement en série entière de la fonction  $f$ .

Nous considérerons désormais un ensemble *ouvert*  $D$  de la droite réelle  $\mathbb{R}$  ou du plan complexe  $\mathbb{C}$ . Si  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $D$  est une réunion d'intervalles ouverts, et si de plus  $D$  est connexe,  $D$  est un intervalle ouvert. Désignons par  $x$  une variable réelle ou complexe, qui varie dans l'ensemble ouvert  $D$ .

*Définition 1. 2.* Une fonction  $f(x)$  à valeurs réelles ou complexes, définie dans l'ouvert  $D$ , est dite *analytique* dans  $D$  si, pour tout point  $x_0 \in D$ , la fonction  $f(x)$  est développable en série entière au point  $x_0$ . Autrement dit, il doit exister un nombre  $\rho(x_0) > 0$  et une série entière formelle  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ , de rayon de convergence  $\geq \rho(x_0)$ , telle que

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n \quad \text{pour } |x - x_0| < \rho(x_0).$$

Les propriétés suivantes sont évidentes : toute fonction analytique dans  $D$  est indéfiniment dérivable dans  $D$ , et ses dérivées successives sont ana-

lytiques dans  $D$ . La somme, le produit de deux fonctions analytiques dans  $D$ , est analytique dans  $D$ ; autrement dit, les fonctions analytiques dans  $D$  forment un anneau, et même une algèbre. Il résulte de la proposition 6. 1

du § 2 que si  $f(x)$  est analytique dans  $D$ ,  $\frac{1}{f(x)}$  est analytique dans l'ouvert  $D$  privé des points  $x_0$  tels que  $f(x_0) = 0$ .

Enfin, il résulte de la proposition 5. 1 du § 2 que si  $f$  est analytique dans  $D$  et prend ses valeurs dans  $D'$ , et si  $g$  est analytique dans  $D'$ , alors la fonction composée  $g \circ f$  est analytique dans  $D$ .

Soit  $f$  une fonction analytique dans  $D$ , supposé *connexe*; si  $f$  possède une primitive  $g$ , c'est-à-dire s'il existe dans  $D$  une fonction  $g$  dont la dérivée  $g'$  est égale à  $f$ , alors cette fonction primitive est unique à l'addition près d'une constante, et c'est une fonction analytique.

*Exemples de fonctions analytiques.* Les polynômes en  $x$  sont des fonctions analytiques sur toute la droite réelle (resp. dans le plan complexe); une fonction rationnelle  $P(x)/Q(x)$  est analytique dans le complémentaire de l'ensemble des points  $x_0$  tels que  $Q(x_0) = 0$ . Il va résulter de la proposition 2. 1 que la fonction  $e^x$  est analytique. La fonction arc  $\operatorname{tg} x$  est analytique pour tout  $x$  réel, puisque sa dérivée  $\frac{1}{1+x^2}$  est analytique.

## 2. CRITÈRES D'ANALYTICITÉ

PROPOSITION 2. 1. Soit  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  une série entière dont le rayon de convergence  $\rho$  est  $\neq 0$ . Soit

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

sa somme pour  $|x| < \rho$ . Alors  $S(x)$  est une fonction analytique dans le disque  $|x| < \rho$ .

Ce résultat n'est nullement évident. Il sera une conséquence immédiate du suivant, plus précis :

PROPOSITION 2. 2. Sous les hypothèses de la proposition 2. 1, soit  $x_0$  tel que  $|x_0| < \rho$ . Alors la série entière

$$(2. 1) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) X^n$$

a un rayon de convergence  $\geq \rho - |x_0|$ , et l'on a

$$(2. 2) \quad S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \quad \text{pour} \quad |x - x_0| < \rho - |x_0|.$$

Démonstration de la proposition 2. 2. Posons  $r_0 = |x_0|$ ,  $x_n = |a_n|$ . On a

$$S^{(p)}(x_0) = \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q}(x_0)^q.$$

$$|S^{(p)}(x_0)| \leq \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} x_{p+q}(r_0)^q.$$

Pour  $r_0 \leq r < \rho$ , on a

$$(2.3) \quad \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(x_0)| (r - r_0)^p \leq \sum_{p, q} \frac{(p+q)!}{p! q!} x_{p+q}(r_0)^q (r - r_0)^p$$

$$\leq \sum_{n \geq 0} x_n \left( \sum_{0 \leq p \leq n} \frac{n!}{(n-p)!} (r - r_0)^p (r_0)^{n-p} \right)$$

$$\leq \sum_{n \geq 0} x_n r^n < +\infty.$$

Donc le rayon de convergence de la série (2. 1) est  $\geq r - r_0$ . Comme  $r$  peut être choisi arbitrairement voisin de  $\rho$ , ce rayon de convergence est  $\geq \rho - r_0$ .

Soit maintenant  $x$  tel que  $|x - x_0| < \rho - r_0$ . La série double

$$\sum_{p, q} \frac{(p+q)!}{p! q!} a_{p+q}(x_0)^q (x - x_0)^p$$

converge absolument, d'après (2. 3). Pour calculer sa somme on peut donc grouper les termes d'une manière arbitraire. Nous allons calculer cette somme de deux façons différentes. Un premier groupement de termes donne :

$$\sum_{n \geq 0} a_n \left( \sum_{0 \leq p \leq n} \frac{n!}{(n-p)!} (x - x_0)^p (x_0)^{n-p} \right) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = S(x);$$

un autre groupement donne :

$$\sum_{p \geq 0} \frac{(x - x_0)^p}{p!} \left( \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q}(x_0)^q \right) = \sum_{p \geq 0} \frac{(x - x_0)^p}{p!} S^{(p)}(x_0).$$

En comparant, on obtient (2. 2), et ceci achève la démonstration.

*Remarque 1.* Il se peut que le rayon de convergence de la série (2. 1) soit strictement plus grand que  $\rho - |x_0|$ . Prenons par exemple la série

$$S(X) = \sum_{n \geq 0} (iX)^n.$$

On a  $S(x) = \frac{1}{1 - ix}$  pour  $|x| < 1$ . Prenons pour  $x_0$  un nombre réel. On a

$$\frac{1}{1 - ix} = \frac{1}{1 - ix_0} \left( 1 - i \frac{x - x_0}{1 - ix_0} \right)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{(1 - ix_0)^{n+1}} (x - x_0)^n.$$

Cette série converge pour  $|x - x_0| < \sqrt{1 + (x_0)^2}$ , et  $\sqrt{1 + (x_0)^2}$  est strictement plus grand que  $1 + |x_0|$ .

*Remarque 2.* Posons

$$A(r) = \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n \quad \text{pour} \quad r < \rho.$$

D'après l'inégalité (2. 3) on a

$$(2. 4) \quad \left| \frac{1}{p!} S^{(p)}(x) \right| \leq \frac{A(r)}{(r - r_0)^p} \quad \text{pour} \quad |x| \leq r_0 < r < \rho.$$

*Remarque 3.* Si  $x$  est une variable *complexe* on verra au chapitre II que toute fonction admettant une dérivée est analytique, et par conséquent indéfiniment dérivable. La situation est toute différente dans le cas d'une variable *réelle* : il existe des fonctions ayant une dérivée première et n'ayant pas de dérivée seconde (il suffit de prendre une primitive d'une fonction continue qui n'admet pas de dérivée). De plus il existe des fonctions indéfiniment dérivables qui ne sont pas analytiques; en voici un exemple simple : la fonction  $f(x)$  égale à zéro pour  $x = 0$  et à  $e^{-1/x^2}$  pour  $x \neq 0$  est indéfiniment dérivable pour tout  $x$ ; elle s'annule ainsi que toutes ses dérivées pour  $x = 0$ ; si elle était analytique elle serait identiquement nulle au voisinage de  $x = 0$ , ce qui n'est pas le cas.

**THÉORÈME.** *Pour qu'une fonction  $f(x)$  d'une variable réelle  $x$ , indéfiniment dérivable dans un intervalle ouvert  $D$ , soit analytique dans  $D$ , il faut et il suffit que tout point  $x_0 \in D$  possède un voisinage  $V$  possédant la propriété suivante: il existe deux nombres  $M$  et  $t$ , finis et  $> 0$ , tels que*

$$(2. 5) \quad \left| \frac{1}{p!} f^{(p)}(x) \right| \leq M \cdot t^p \quad \text{pour tout } x \in V \text{ et tout entier } p \geq 0.$$

*Démonstration abrégée.* On montre que la condition est nécessaire en utilisant l'inégalité (2. 4). On montre qu'elle est suffisante en écrivant le développement limité de Taylor de la fonction  $f(x)$  et en majorant le reste de Lagrange grâce à (2. 5).

### 3. PRINCIPE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE

**THÉORÈME.** *Soit  $f$  une fonction analytique dans un ouvert connexe  $D$ , et soit  $x_0 \in D$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- a)  $f^{(n)}(x_0) = 0$  pour tout entier  $n \geq 0$ ;
- b)  $f$  est identiquement nulle dans un voisinage de  $x_0$ ;
- c)  $f$  est identiquement nulle dans  $D$ .

*Démonstration.* Il est évident que c) entraîne a). On va montrer que a) entraîne b) et que b) entraîne c). Supposons remplie la condition a). On a donc  $f^{(n)}(x_0) = 0$  pour tout  $n \geq 0$ , en convenant que  $f^{(0)} = f$ . Au voisinage de  $x_0$ ,  $f(x)$  est développable en série entière suivant les puissances de  $x - x_0$ , et les coefficients  $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$  sont nuls; donc  $f(x)$  est identiquement nulle dans un voisinage de  $x_0$ , ce qui démontre (b).

Supposons remplie la condition (b). Pour montrer que  $f$  est nulle en tous les points de  $D$ , il suffit de montrer que l'ensemble  $D'$  des points  $x \in D$  au voisinage desquels  $f$  est identiquement nulle est à la fois ouvert et fermé ( $D'$  n'est pas vide en vertu de (b), donc, puisque  $D$  est connexe,  $D'$  sera égal à  $D$ ). Que  $D'$  soit ouvert résulte de sa définition. Il reste à prouver que si  $x_0 \in D$  est adhérent à  $D'$ , alors  $x_0 \in D'$ . Or pour chaque  $n \geq 0$ , on a  $f^{(n)}(x) = 0$  en des points arbitrairement voisins de  $x_0$  (à savoir les points de  $D'$ ); donc, en vertu de la continuité de  $f^{(n)}$ , on a  $f^{(n)}(x_0) = 0$ ; ceci ayant lieu pour tout  $n \geq 0$ , on vient de voir que  $f(x)$  est identiquement nulle au voisinage de  $x_0$ . Ainsi  $x_0 \in D'$ , ce qui achève la démonstration.

**COROLLAIRE 1.** *L'anneau des fonctions analytiques dans un ouvert connexe  $D$  est un anneau d'intégrité.*

En effet, si le produit  $fg$  de deux fonctions analytiques dans  $D$  est identiquement nul, et si  $x_0 \in D$ , l'une des fonctions  $f$  et  $g$  est identiquement nulle au voisinage de  $x_0$ , puisque l'anneau des séries entières formelles est un anneau d'intégrité. Mais si  $f$  est identiquement nulle au voisinage de  $x_0$ ,  $f$  est nulle dans  $D$  tout entier, d'après le théorème précédent.

**COROLLAIRE 2.** (Principe du prolongement analytique.) *Si deux fonctions analytiques  $f$  et  $g$  dans un ouvert connexe  $D$  coïncident au voisinage d'un point de  $D$ , elles sont identiques dans  $D$ .*

Le problème du prolongement analytique consiste en ceci : étant donnée une fonction analytique  $h$  dans un ouvert connexe  $D'$ , et étant donné un ouvert connexe  $D$  contenant  $D'$ , on se demande s'il existe une fonction  $f$  analytique dans  $D$  et qui prolonge  $h$ . D'après le corollaire 2, si une telle fonction  $f$  existe, elle est unique.

#### 4. ZÉROS D'UNE FONCTION ANALYTIQUE

Soit  $f(x)$  une fonction analytique dans un voisinage de  $x_0$ , et soit

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$$

son développement en série entière pour  $|x - x_0|$  assez petit. Supposons  $f(x_0) = 0$ , et supposons que  $f(x)$  ne soit pas identiquement nulle au voisinage de  $x_0$ .

Soit  $k$  le plus petit entier tel que  $a_k \neq 0$ . La série

$$\sum_{n \geq k} a_n (x - x_0)^{n-k}$$

converge pour  $|x - x_0|$  assez petit, et sa somme  $g(x)$  est une fonction analytique au voisinage de  $x_0$  et telle que  $g(x_0) \neq 0$ . Ainsi, pour  $x$  voisin de  $x_0$ , on a

$$(4. 1) \quad f(x) = (x - x_0)^k g(x), \quad g(x_0) \neq 0.$$

L'entier  $k > 0$  ainsi défini s'appelle *l'ordre de multiplicité du zéro  $x_0$  pour la fonction  $f$* . Il est caractérisé par la relation (4. 1), où  $g(x)$  est analytique au voisinage de  $x_0$ . L'ordre de multiplicité  $k$  est aussi caractérisé par la condition :

$$f^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < k, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Si  $k = 1$ , on dit que  $x_0$  est un zéro *simple*. Si  $k \geq 2$ , on dit que  $x_0$  est un zéro *multiple*.

La relation (4. 1) et la continuité de  $g(x)$  entraînent

$$f(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad 0 < |x - x_0| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ assez petit}).$$

Autrement dit, le point  $x_0$  possède un voisinage dans lequel il est *l'unique* zéro de la fonction  $f(x)$ .

**PROPOSITION 4. 1.** *Si  $f$  est une fonction analytique dans un ouvert connexe  $D$  et si  $f$  n'est pas identiquement nulle, l'ensemble des zéros de  $f$  est un ensemble discret (autrement dit, tous les points de cet ensemble sont isolés).*

En effet, d'après le corollaire 2 du n° 3,  $f$  n'est identiquement nulle au voisinage d'aucun point de  $D$ , et on peut appliquer ce qui précède à chaque zéro de  $f$ .

En particulier, tout sous-ensemble *compact* de  $D$  ne contient qu'un nombre *fini* de zéros de la fonction  $f$ .

## 5. FONCTIONS MÉROMORPHES

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques dans l'ouvert connexe  $D$ , et supposons que  $g$  ne soit pas identiquement nulle. La fonction  $f(x)/g(x)$  est définie et analytique au voisinage de tout point  $x_0$  tel que  $g(x_0) \neq 0$ , c'est-à-dire en tout point de  $D$  sauf peut-être en des points isolés.

Examinons le comportement de  $f(x)/g(x)$  au voisinage d'un point  $x_0$  qui annule  $g(x)$ ; si  $f$  n'est pas identiquement nulle, on a

$$f(x) = (x - x_0)^k f_1(x), \quad g(x) = (x - x_0)^k g_1(x),$$

où  $k$  et  $k'$  sont entiers,  $k \geq 0$ ,  $k' > 0$ ,  $f_1$  et  $g_1$  sont analytiques au voisinage de  $x_0$ ,  $f_1(x_0) \neq 0$ ,  $g_1(x_0) \neq 0$ ; donc, pour  $x \neq x_0$  et voisin de  $x_0$ ,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (x - x_0)^{k-k'} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

La fonction  $h_1(x) = f_1(x)/g_1(x)$  est analytique au voisinage de  $x_0$  et l'on a  $h_1(x_0) \neq 0$ . Deux cas sont alors possibles :

1° on a  $k \geq k'$ ; alors la fonction

$$(x - x_0)^{k-k'} h_1(x)$$

est analytique au voisinage de  $x_0$  et coïncide avec  $f(x)/g(x)$  pour  $x \neq x_0$ . Ainsi prolongée au point  $x_0$ , la fonction  $f/g$  est analytique au voisinage de  $x_0$ ; elle admet  $x_0$  pour zéro si  $k > k'$ .

2° On a  $k < k'$ . Alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x - x_0)^{k'-k}} h_1(x), \quad h_1(x_0) \neq 0.$$

On dit dans ce cas que  $x_0$  est un *pôle* pour la fonction  $f/g$ ; l'entier  $k' - k$  s'appelle l'*ordre de multiplicité* de ce pôle. Lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  tend vers  $+\infty$ . On peut convenir de prolonger la fonction  $f/g$  en lui donnant la valeur « infini » au point  $x_0$ . On reviendra plus tard sur l'introduction de cet unique nombre infini noté  $\infty$ .

Si  $f(x)$  est analytique et admet  $x_0$  pour zéro d'ordre  $k > 0$ , il est clair que  $1/f(x)$  admet  $x_0$  pour pôle d'ordre  $k$ .

*Définition.* On appelle fonction *méromorphe* dans un ouvert connexe  $D$  une fonction  $f(x)$  définie et analytique dans un ouvert  $D'$  obtenu en enlevant de  $D$  un ensemble de points isolés, dont chacun est un *pôle* pour  $f(x)$ .

Au voisinage de chaque point de  $D$  (sans exception),  $f$  peut donc se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions analytiques  $h(x)/g(x)$ , le dénominateur n'étant pas identiquement nul. On définit d'une manière évidente la somme et le produit de deux fonctions méromorphes : les fonctions méromorphes dans  $D$  forment un anneau, et même une algèbre. En fait elles forment un *corps*, car si  $f(x)$  n'est pas identiquement nulle dans  $D$ , elle n'est identiquement nulle au voisinage d'aucun point de  $D$ , d'après le théorème du n° 3; donc  $1/f(x)$  est analytique ou possède un pôle en chaque point de  $D$ , et par suite  $1/f(x)$  est méromorphe dans  $D$ .

**PROPOSITION 5. 1.** *La dérivée  $f'$  d'une fonction  $f$  méromorphe dans  $D$  est une fonction méromorphe dans  $D$ ; les fonctions  $f$  et  $f'$  ont les mêmes pôles; si  $x_0$  est un pôle d'ordre  $k$  de  $f$ , c'est un pôle d'ordre  $k + 1$  de  $f'$ .*



En effet,  $f'$  est définie et analytique en tout point de  $D$  qui n'est pas un pôle de  $f$ . Il reste à montrer que si  $x_0$  est un pôle de  $f$ ,  $x_0$  est aussi un pôle de  $f'$ . Or on a, pour  $x$  voisin de  $x_0$ ,

$$f(x) = \frac{1}{(x - x_0)^k} g(x),$$

$g(x)$  étant analytique, avec  $g(x_0) \neq 0$ ,  $k > 0$ . On a donc, pour  $x \neq x_0$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{(x - x_0)^{k+1}} [(x - x_0)g'(x) - kg(x)] - \frac{1}{(x - x_0)^{k+1}} g_1(x),$$

et comme  $g_1(x_0) \neq 0$ ,  $x_0$  est bien un pôle de  $f'$ , d'ordre  $k + 1$ .

## Exercices

1. Soient  $K$  un corps commutatif,  $X$  une indéterminée, et  $E = K[[X]]$  l'algèbre des séries entières formelles à coefficients dans  $K$ . Pour  $S, T$  dans  $E$ , posons

$$d(S, T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = T, \\ e^{-k} & \text{si } S \neq T, \text{ et } \omega(S - T) = k. \end{cases}$$

- Montrer que  $d$  définit une distance dans l'ensemble  $E$ .
- Montrer que les applications :  $(S, T) \rightarrow S + T$ ,  $(S, T) \rightarrow ST$  définies dans  $E \times E$ , à valeurs dans  $E$ , sont continues par rapport à la topologie définie par la métrique  $d$ .
- Montrer que l'algèbre  $K[X]$  des polynômes, comme sous-ensemble de  $E$ , est partout dense dans  $E$ .
- Montrer que l'espace métrique  $E$  est complet. (Si  $(S_n)$  est une suite de Cauchy dans  $E$ , remarquer que, pour tout entier  $m > 0$ , les  $m$  premiers termes de  $S_n$  ne dépendent pas de  $n$ , pour  $n$  assez grand.)
- L'application  $S \rightarrow S'$  (la dérivée de  $S$ ) est-elle continue?

2. Soient  $p, q$  des entiers  $\geq 1$ . Soit la série entière formelle

$$S_1(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^q + \dots,$$

et posons

$$S_p(X) = (S_1(X))^p.$$

a) Montrer, par récurrence sur  $n$ , la relation

$$(1) \quad 1 + p + \frac{p(p+1)}{2!} + \dots + \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} = \frac{(p+1)\dots(p+n)}{n!},$$

et en déduire (par récurrence sur  $p$ ) le développement

$$(2) \quad S_p(X) = \sum_{n \geq 0} \binom{p+n-1}{n} X^n,$$

où  $\binom{k}{h}$  désigne le coefficient binomial  $\frac{k!}{h!(k-h)!}$ .

b) En utilisant  $S_p(X) \cdot S_q(X) = S_{p+q}(X)$ , montrer la relation

$$(3) \quad \sum_{0 \leq l \leq n} \binom{p+l-1}{l} \binom{q+n-l-1}{n-l} = \binom{p+q+n-1}{n}$$

[qui généralise (1), cas où  $q = 1$ ].

3. Expliciter les polynômes  $P_n$  dans la démonstration de la proposition 7. 1, § 1, pour  $n \leq 5$ , et calculer les termes de degré  $\leq 5$  de la série formelle réciproque de

$$S(X) = X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5 + \dots + (-1)^p \frac{1}{2p+1} X^{2p+1} + \dots$$

4. Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes :

a)  $\sum_{n \geq 0} q^n z^n$  ( $|q| < 1$ ),

b)  $\sum_{n \geq 0} n^p z^n$  ( $p$  entier  $> 0$ ),

c)  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , avec  $a_{2n+1} = a^{2n+1}$ ,  $a_{2n} = b^{2n}$  pour  $n \geq 0$ ,

$a, b$  réels et  $0 < a, b < 1$ .

5. Soient deux séries entières formelles :

$$S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n, \quad \text{et} \quad T(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n, \quad (b_n \neq 0)$$

et posons

$$U(X) = \sum_{n \geq 0} (a_n)^p X^n, \quad V(X) = \sum_{n \geq 0} a_n b_n X^n, \quad W(X) = \sum_{n \geq 0} (a_n/b_n) X^n$$

( $p$  entier). Montrer les relations suivantes :

$$\rho(U) = (\rho(S))^p, \quad \rho(V) \geq \rho(S) \cdot \rho(T),$$

et si  $\rho(T) \neq 0$ ,

$$\rho(W) \leq \rho(S)/\rho(T).$$

6. Soient  $a, b$  et  $c$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $c$  n'étant pas un entier  $\leq 0$ . Quel est le rayon de convergence de la série

$$S(X) = 1 + \frac{ab}{c}X + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{2!c(c+1)}X^2 + \dots \\ + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1) \cdot b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)}X^n + \dots$$

Montrer que sa somme  $S(z)$ , pour  $|z| < \rho(S)$ , satisfait à l'équation différentielle suivante

$$z(1-z)S'' + (c - (a+b+1)z)S' - abS = 0.$$

7. Soit  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  une série entière formelle telle que  $\rho(S) = 1$ . Posons

$$s_n = a_0 + \dots + a_n, \quad t_n = \frac{1}{n+1} (s_0 + s_1 + \dots + s_n) \text{ pour } n \geq 0,$$

et

$$U(X) = \sum_{n \geq 0} s_n X^n, \quad V(X) = \sum_{n \geq 0} t_n X^n.$$

Montrer que : (i)  $\rho(U) = \rho(V) = 1$ , et que : (ii) pour tout  $|z| < 1$ ,

$$\frac{1}{1-z} \left( \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} s_n z^n.$$

8. Soit  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  une série entière formelle, dont les coefficients sont définis par les relations de récurrence suivantes :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} \text{ pour } n \geq 2,$$

où  $\alpha, \beta$  sont deux nombres réels donnés.

a) Montrer que l'on a, pour  $n \geq 1$ ,  $|a_n| \leq (2c)^{n-1}$ , où  $c = \max(\alpha, \beta, 1/2)$ . et en déduire que le rayon de convergence  $\rho(S) \neq 0$ .

b) Montrer que l'on a :

$$(1 - \alpha z - \beta z^2)S(z) = z, \text{ pour } |z| < \rho(S),$$

et en déduire que, pour  $|z| < \rho(S)$ , on a

$$(1) \quad S(z) = \frac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2}.$$

c) Soient  $z_1, z_2$  les deux racines de  $\beta X^2 + \alpha X - 1 = 0$ . En utilisant la

décomposition en éléments simples du second membre de (1), trouver une expression de  $a_n$  à l'aide de  $z_1$  et  $z_2$ , et en déduire que

$$\rho(S) = \text{Min}(|z_1|, |z_2|).$$

(Remarquer que, si  $S(X) = S_1(X) \cdot S_2(X)$ , on a:  $\rho(S) \geq \text{Min}(\rho(S_1), \rho(S_2))$ .)

9. Montrer que, si  $x, y$  sont réels,  $n$  entier  $\geq 0$ ,  $x \neq 2k\pi$  ( $k$  entier), on a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq p \leq n} \cos(px + y) &= \cos\left(\frac{n}{2}x + y\right) \sin \frac{n+1}{2} x / \sin \frac{x}{2}, \\ \sum_{0 \leq p \leq n} \sin(px + y) &= \sin\left(\frac{n}{2}x + y\right) \sin \frac{n+1}{2} x / \sin \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

(Utiliser  $\cos(px + y) + i \sin(px + y) = e^{i(n+1)y} = e^{i(e^{ix})^p}$ .)

10. Montrer les inégalités suivantes, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ :

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}.$$

11. Montrer qu'on peut écrire, pour tout entier  $n \geq 1$ , et tout  $z$  complexe

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{2 \leq p \leq n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \frac{z^p}{p!},$$

et en déduire que, pour tout  $z$  complexe, on a

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

12. Montrer que la fonction d'une variable complexe  $z$  définie par

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \left(\text{resp. } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$$

est le prolongement analytique, dans tout le plan  $\mathbb{C}$ , de la fonction  $\cos x$  (resp.  $\sin x$ ), définie au § 3, n° 3. Montrer que l'on a, quels que soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z',$$

$$\sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z';$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

13. Montrer que l'on a

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x \quad \text{pour } x \text{ réel, } 0 \leq x \leq \pi/2.$$

14. Soit  $z = x + iy$ ,  $x, y$  réels. (i) Montrer que l'on a

$$\begin{aligned} |\sin(x + iy)|^2 &= \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \\ |\cos(x + iy)|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y; \end{aligned}$$

(ii) déterminer les zéros des fonctions  $\sin az$ ,  $\cos az$  (où  $a$  est un nombre réel  $\neq 0$ );

(iii) montrer que, si  $-\pi < a < \pi$ , et si  $n$  est entier positif, on a

$$\frac{|\sin az|}{|\sin \pi z|} \leq \frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y}, \quad \text{pour } z = n + \frac{1}{2} + iy,$$

et

$$\frac{|\sin az|}{|\sin \pi z|} \leq \frac{\operatorname{ch} a \left( n + \frac{1}{2} \right)}{\operatorname{sh} \pi \left( n + \frac{1}{2} \right)}, \quad \text{pour } z = x + i \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

N. B. Par définition,  $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$ ,  $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$ .

15. Soit  $I$  un intervalle de la droite réelle  $\mathbb{R}$ . Montrer que, si  $f(x)$  est une fonction (d'une variable réelle, et à valeurs complexes) analytique dans  $I$ , on peut la prolonger en une fonction analytique dans un ouvert connexe  $D$  du plan complexe, contenant  $I$ .

16. (i) Soient  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$  deux suites de nombres ayant les propriétés suivantes :

a) il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq M \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

b) les  $\beta_n$  sont réels  $\geq 0$  et  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \geq \dots$ . Montrer que l'on a, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n \leq M \beta_1.$$

(Introduire  $s_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , et écrire

$$\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n = (\beta_1 - \beta_2) s_1 + \dots + (\beta_{n-1} - \beta_n) s_{n-1} + \beta_n s_n.)$$

(ii) Soit  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  une série entière formelle à coefficients complexes, telle que  $\rho(S) = 1$ , et que  $\sum_{n \geq 0} a_n$  soit convergente. Utiliser (i) pour montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  converge uniformément dans l'intervalle fermé  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ , et en conclure que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ 0 < x < 1}} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n.$$

(iii) Soit maintenant  $S(X) = \sum_{n \geq 1} X^n/n^2$ , et soit  $D$  l'intersection du disque ouvert  $|z| < 1$  et du disque ouvert  $|z - 1| < 1$ . Montrer qu'il existe une constante  $a$  telle que l'on ait

$$S(z) + S(1 - z) = a - \log z \log(1 - z) \quad \text{pour } z \in D,$$

où  $\log$  désigne la détermination principale du logarithme complexe dans le demi-plan  $\operatorname{Re}(z) > 0$  (qui contient  $D$ ).

(Remarquer que, si  $z \in D$ , on a  $\log(1 - z) = -T(z)$ , avec

$$T(X) = X.S'(X),$$

en vertu de la proposition 6. 1 du § 3, et que, d'après la proposition 6. 2 du § 3, on a

$$\frac{d}{dz}(\log z \log(1 - z)) = \frac{\log(1 - z)}{z} - \frac{\log z}{1 - z} \quad \text{pour } z \in D).$$

Utiliser ensuite (ii) pour montrer que l'on a

$$a = \sum_{n \geq 1} 1/n^2,$$

$$a - (\log 2)^2 = \sum_{n \geq 1} 1/n^2 2^{n-1}.$$

(Cf. Chapitre v, § 2, 2, application de la proposition 2. 1).

# Fonctions holomorphes, intégrale de Cauchy

## 1. Intégrales curvilignes

### 1. GÉNÉRALITÉS

Rappelons quelques notions élémentaires relatives aux intégrales curvilignes dans le plan  $\mathbb{R}^2$ .

On notera  $x$  et  $y$  les fonctions coordonnées dans  $\mathbb{R}^2$ .

On appelle *chemin différentiable* une application

$$(1. 1) \quad t \rightarrow \gamma(t)$$

du segment  $[a, b]$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , telle que les coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  du point  $\gamma(t)$  soient des fonctions continûment différentiables. On supposera toujours  $a < b$ . L'*origine* de  $\gamma$  est le point  $\gamma(a)$ , l'*extrémité* de  $\gamma$  est le point  $\gamma(b)$ . Si  $D$  est un ouvert du plan, on dit que  $\gamma$  est un chemin différentiable de l'ouvert  $D$  si la fonction  $\gamma$  prend ses valeurs dans  $D$ .

Une forme différentielle dans un ouvert  $D$  est une expression

$$\omega = P dx + Q dy$$

dont les coefficients  $P$  et  $Q$  sont des fonctions (à valeurs réelles ou complexes) continues dans  $D$ .

Si  $\gamma$  est un chemin différentiable de  $D$ , et  $\omega$  une forme différentielle dans  $D$ , on définit l'intégrale  $\int_{\gamma} \omega$  par la formule

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \gamma^*(\omega),$$

où  $\gamma^*(\omega)$  désigne la forme différentielle  $f(t) dt$  définie par

$$f(t) = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t);$$

autrement dit,  $\gamma^*(\omega)$  est la forme différentielle déduite de  $\omega$  par le changement de variables  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Ainsi :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b f(t) dt.$$

Considérons maintenant une fonction  $t = t(u)$  continûment dérivable pour  $a_1 \leq u \leq b_1$  (avec  $a_1 < b_1$ ), dont la dérivée  $t'(u)$  soit partout  $> 0$ , et telle que  $t(a_1) = a$ ,  $t(b_1) = b$ . L'application composée de l'application  $u \rightarrow t(u)$  et de l'application (1. 1) est

$$(1. 2) \quad u \rightarrow \gamma(t(u)).$$

Elle définit un chemin différentiable  $\gamma_1$ . On dit que  $\gamma_1$  est déduit de  $\gamma$  par *changement de paramètre*. La forme différentielle  $f_1(u) du$ , transformée de  $\omega$  par l'application (1. 2), est égale à

$$f(t(u))t'(u) du,$$

en vertu de la formule donnant la dérivée d'une fonction composée. La formule du changement de variable dans les intégrales simples donne la relation

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Autrement dit, l'intégrale curviligne  $\int_{\gamma} \omega$  ne change pas de valeur si on remplace le chemin différentiable  $\gamma$  par un autre, déduit de  $\gamma$  par changement de paramètre. On pourra donc éventuellement désigner par la même lettre des chemins qui se déduisent les uns des autres par changement du paramètre.

Prenons maintenant une fonction  $t = t(u)$  continûment dérivable pour  $a_1 \leq u \leq b_1$ , mais telle que  $t'(u) < 0$ ,  $t(a_1) = b$ ,  $t(b_1) = a$  (le « sens de parcours » du segment est renversé). Alors on constate que  $\int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma} \omega$ . On dit alors qu'on a effectué sur  $\gamma$  un changement de paramètre qui *change l'orientation* de  $\gamma$ ; ceci a pour effet de multiplier  $\int_{\gamma} \omega$  par  $-1$ .

Subdivisons l'intervalle  $[a, b]$  décrit par le paramètre  $t$  en un nombre fini d'intervalles partiels

$$[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n], [t_n, b];$$

on suppose  $a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < b$ . Soit  $\gamma_i$  la restriction de l'application  $\gamma$  au  $i$ -ième de ces intervalles; il est clair que

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \left( \int_{\gamma_i} \omega \right).$$



Cette propriété conduit à généraliser la notion de chemin différentiable. On appelle chemin *différentiable par morceaux* une application continue

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

telle qu'il existe une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  en un nombre fini d'intervalles partiels comme ci-dessus, de façon que les restrictions de  $\gamma$  à ces intervalles partiels soient continûment dérivables. On pose par définition

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^{n+1} \left( \int_{\gamma_i} \omega \right).$$

La valeur du second membre ne dépend pas de la décomposition.

L'origine de  $\gamma_1$  s'appelle l'origine de  $\gamma$ , l'extrémité de  $\gamma_{n+1}$  s'appelle l'extrémité de  $\gamma$ . On dit que le chemin est *fermé* si son origine et son extrémité coïncident.

Un chemin fermé  $\gamma$  peut aussi être défini en prenant, au lieu d'un paramètre réel  $t$  qui varie de  $a$  à  $b$ , un paramètre  $\theta$  qui décrit la circonférence-unité.

*Exemple.* Considérons, dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , le périmètre (ou « bord ») d'un rectangle  $A$  dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Le rectangle est l'ensemble des points  $(x, y)$  satisfaisant à

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2.$$

Son bord se compose de quatre segments de droite

$$\begin{array}{ll} x = a_2, & b_1 \leq y \leq b_2, \\ y = b_2, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ x = a_1, & b_1 \leq y \leq b_2, \\ y = b_1, & a_1 \leq x \leq a_2. \end{array}$$

Pour que ce bord définisse un chemin fermé  $\gamma$ , différentiable par morceaux, on doit préciser quel est le « sens de parcours » choisi. On conviendra toujours que le sens de parcours est le suivant :

$y$  croît de  $b_1$  à  $b_2$  sur le côté  $x = a_2$ ,  $x$  décroît de  $a_2$  à  $a_1$  sur le côté  $y = b_2$ ,  $y$  décroît de  $b_2$  à  $b_1$  sur le côté  $x = a_1$ ,  $x$  croît de  $a_1$  à  $a_2$  sur le côté  $y = b_1$ .

Alors l'intégrale  $\int_{\gamma} \omega$  est bien définie; elle ne dépend pas du choix de l'origine de  $\gamma$ , car elle est de toute façon égale à la somme des intégrales le long des quatre côtés, chacun étant parcouru dans le sens qu'on vient d'indiquer.

## 2. PRIMITIVE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE

**LEMME.** Soit  $D$  un ouvert connexe du plan. Quels que soient les points  $a \in D$  et  $b \in D$ , il existe un chemin différentiable par morceaux, contenu dans  $D$ , ayant a

pour origine et  $b$  pour extrémité. (On exprimera brièvement ce fait en disant que  $a$  et  $b$  peuvent être joints par un chemin différentiable par morceaux.)

*Démonstration.* Tout point  $c \in D$  est centre d'un disque contenu dans  $D$ ;  $c$  peut être joint à tout point de ce disque par un chemin différentiable par morceaux et contenu dans  $D$ , par exemple par un rayon. Soit alors donné un point  $a \in D$ ; si  $c$  peut être joint à  $a$ , tout point assez voisin de  $c$  peut aussi être joint à  $a$ , d'après ce qui précède; donc l'ensemble  $E$  des points de  $D$  qui peuvent être joints à  $a$  est ouvert. D'autre part,  $E$  est fermé dans  $D$ ; car si  $c \in D$  est adhérent à  $E$ ,  $c$  peut être joint à un point convenable de  $E$  d'après ce qui précède, donc  $c$  peut être joint à  $a$ . Par hypothèse,  $D$  est connexe; le sous-ensemble  $E$  de  $D$ , qui est ouvert et fermé dans  $D$ , et n'est pas vide (puisque  $a \in E$ ) est donc  $D$  tout entier.

C.Q.F.D.

Soit toujours  $D$  un ouvert connexe du plan, et soit  $\gamma$  un chemin différentiable par morceaux, contenu dans  $D$ ; soit  $a$  son origine,  $b$  son extrémité. Soit  $F$  une fonction continûment différentiable dans  $D$ ; considérons la forme différentielle  $\omega = dF$ ; alors on a la relation évidente

$$(2.1) \quad \int_{\gamma} dF = F(b) - F(a).$$

Il résulte de là et du lemme que si la différentielle  $dF$  est identiquement nulle dans  $D$ , la fonction  $F$  est constante dans  $D$ .

Étant donnée une forme différentielle  $\omega$  dans un ouvert connexe  $D$ , cherchons s'il existe une fonction  $F(x, y)$  continûment différentiable dans  $D$  et telle que  $dF = \omega$ . Si  $\omega = P dx + Q dy$ , la relation  $dF = \omega$  équivaut à

$$(2.2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Une telle fonction  $F$ , si elle existe, s'appelle une primitive de la forme  $\omega$ . Dans ce cas, toute autre primitive  $G$  s'obtient en ajoutant à  $F$  une constante, puisque  $d(F - G) = 0$ .

**PROPOSITION 2. 1.** Pour que la forme différentielle  $\omega$  admette une primitive dans  $D$ , il faut et il suffit que l'on ait  $\int_{\gamma} \omega = 0$  pour tout chemin fermé  $\gamma$ , différentiable par morceaux, contenu dans  $D$ .

*Démonstration.* 1° La condition est nécessaire, car si  $\omega = dF$ , la relation (2.1) montre que  $\int_{\gamma} \omega = 0$  chaque fois que l'origine  $a$  et l'extrémité  $b$  de  $\gamma$  coïncident.

2° La condition est suffisante. Choisissons en effet un point  $(x_0, y_0) \in D$ ; tout point  $(x, y) \in D$  peut être joint à  $(x_0, y_0)$  par un chemin  $\gamma$  continu-

ment différentiable par morceaux et contenu dans  $D$  (d'après le lemme); l'intégrale  $\int_{\gamma} \omega$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$ , puisque par hypothèse l'intégrale de  $\omega$  est nulle pour tout chemin fermé. Soit  $F(x, y)$  la valeur commune des intégrales  $\int_{\gamma} \omega$  relatives aux chemins  $\gamma$  d'origine  $(x_0, y_0)$  et d'extrémité  $(x, y)$  contenus dans  $D$ . On va montrer que la fonction  $F$  ainsi définie dans  $D$  satisfait aux relations (2. 2).

Donnons à  $x$  un petit accroissement  $h$ ; la différence

$$F(x + h, y) - F(x, y)$$

est égale à l'intégrale  $\int_{\gamma} \omega$  le long de n'importe quel chemin d'origine  $(x, y)$  et d'extrémité  $(x + h, y)$  contenu dans  $D$ . Intégrons en particulier le long d'un segment de droite parallèle à l'axe des  $x$  (ce qui est possible si  $|h|$  est assez petit) :

$$F(x + h, y) - F(x, y) = \int_x^{x+h} P(\xi, y) d\xi,$$

et par suite, si  $h \neq 0$ ,

$$\frac{F(x + h, y) - F(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(\xi, y) d\xi.$$

Lorsque  $h$  tend vers 0, le second membre tend vers  $P(x, y)$ , en vertu de la continuité de la fonction  $P$ . On a donc bien

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y).$$

On prouverait de même que  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ . Ceci achève la démonstration de la proposition 2. 1.

Considérons en particulier les rectangles contenus dans  $D$  et dont les côtés sont parallèles aux axes (nous entendons que le rectangle doit être tout entier contenu dans  $D$ , aussi bien son intérieur que sa frontière). Si  $\gamma$  est le bord d'un tel rectangle, on doit avoir  $\int_{\gamma} \omega = 0$  pour que la forme différentielle  $\omega$  admette une primitive dans  $D$ . Cette condition nécessaire n'est pas toujours suffisante, comme on le verra plus loin. Cependant elle est suffisante lorsque  $D$  est « simplement connexe » (cf. n° 7). Pour le moment nous nous contenterons de démontrer ceci :

**PROPOSITION 2. 2.** *Soit  $D$  un disque ouvert. Si l'on a  $\int_{\gamma} \omega = 0$  chaque fois que  $\gamma$  est le bord d'un rectangle contenu dans  $D$  et dont les côtés sont parallèles aux axes, alors  $\omega$  admet une primitive dans  $D$ .*

*Démonstration.* Soit  $(x_0, y_0)$  le centre du disque  $D$ , et soit  $(x, y)$  un point quelconque de  $D$ . Il y a deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ayant pour origine  $(x_0, y_0)$  et pour extrémité  $(x, y)$ , et tels que chacun d'eux se compose de deux des quatre côtés du rectangle (dont les côtés sont parallèles aux axes) ayant pour sommets opposés  $(x_0, y_0)$  et  $(x, y)$  [Voir figure 1]. Puisque ce rectangle

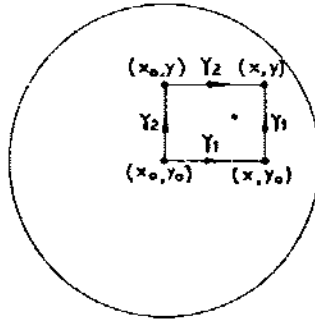


Figure 1

est contenu dans  $D$ , on a  $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ . Soit  $F(x, y)$  la valeur commune de ces deux intégrales; on montre comme plus haut que  $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ , et ceci prouve la proposition.

### 3. FORMULE DE GREEN-RIEMANN

Cette formule généralise, dans un certain sens, la relation (2. 1) : au lieu de relier la valeur d'une intégrale simple à celles d'une fonction, elle relie les valeurs d'une intégrale double et d'une intégrale curviligne. Soit  $A$  un rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes, soit  $\gamma$  son bord, et soient  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  des fonctions définies dans un voisinage  $D$  de  $A$ , continues dans  $D$  et admettant dans  $D$  des dérivées partielles  $\frac{\partial P}{\partial y}$  et  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  continues. La formule de Green-Riemann s'écrit alors :

$$(3. 1) \quad \int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

*Démonstration.* On va par exemple prouver

$$\int_{\gamma} Q dy = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

On sait que l'intégrale double de la fonction continue  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  peut se calculer comme suit :

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \left( \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right).$$

Explicitons :  $\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(a_2, y) - Q(a_1, y)$ ; en intégrant alors par rapport à  $y$ , on trouve

$$\int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, y) dy - \int_{b_1}^{b_2} Q(a_1, y) dy$$

ce qui est justement égal à  $\int_{\gamma} Q dy$ . C. Q. F. D.

La formule de Green-Riemann est valable pour des domaines plus généraux qu'un rectangle; mais nous laisserons pour le moment cette question de côté.

**PROPOSITION 3. 1.** Soit  $\omega = P dx + Q dy$  une forme différentielle dans un ouvert connexe  $D$ , et supposons que les dérivées partielles  $\frac{\partial P}{\partial y}$  et  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  existent et soient continues dans  $D$ . Alors la relation

$$(3. 2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

est nécessaire pour que  $\omega$  admette une primitive dans  $D$ ; elle est suffisante lorsque  $D$  est un disque ouvert.

*Démonstration.* D'après la formule (3. 1), la condition (3. 2) entraîne que  $\int_{\gamma} \omega = 0$  chaque fois que  $\gamma$  est le bord d'un rectangle contenu dans  $D$ ; si  $D$  est un disque ouvert, ceci entraîne que  $\omega$  admet une primitive (proposition 2. 2). Réciproquement, si  $\int_{\gamma} \omega = 0$  chaque fois que  $\gamma$  est le bord d'un rectangle  $A$  contenu dans  $D$  et dont les côtés sont parallèles aux axes, on a

$$(3. 3) \quad \iint_A \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = 0$$

pour tout tel rectangle  $A$ . Or ceci entraîne la relation (3. 2). En effet, si la fonction continue  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$  n'était pas identiquement nulle dans  $D$

il y aurait un point de  $D$  au voisinage duquel elle serait par exemple  $> 0$ , et par conséquent l'intégrale

$$\iint_{\Lambda} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy$$

serait  $> 0$  pour un rectangle  $\Lambda$  contenu dans ce voisinage, contrairement à l'hypothèse (3. 3). La proposition 3. 1 est ainsi démontrée.

#### 4. FORMES DIFFÉRENTIELLES FERMÉES

*Définition.* On dit qu'une forme  $\omega = P dx + Q dy$ , à coefficients  $P$  et  $Q$  continus dans un ouvert  $D$ , est *fermée* si tout point  $(x_0, y_0) \in D$  possède un voisinage ouvert dans lequel  $\omega$  a une primitive. On peut supposer qu'un tel voisinage est un disque de centre  $(x_0, y_0)$ . Alors les résultats des n° 2 et 3 entraînent aussitôt :

**PROPOSITION 4. 1.** *Pour qu'une forme différentielle  $\omega$  à coefficients continus dans  $D$  soit fermée, il faut et il suffit que l'on ait  $\int_{\gamma} \omega = 0$  chaque fois que  $\gamma$  est le bord d'un petit rectangle contenu (ainsi que son intérieur) dans  $D$ , et ayant ses côtés parallèles aux axes. Si on suppose en outre que  $P$  et  $Q$  ont des dérivées partielles du premier ordre continues, alors la condition (3. 2) est nécessaire et suffisante pour que  $\omega$  soit fermée.*

D'après la proposition 2. 2, toute forme fermée dans un *disque ouvert*  $\gamma$  admet une primitive. On va maintenant donner l'exemple d'un ouvert connexe  $D$  et d'une forme fermée  $\omega$  dans  $D$  qui n'admet pas de primitive dans  $D$ .

**PROPOSITION 4. 2.** *Soit  $D$  l'ouvert formé de tous les points  $z \neq 0$  du plan complexe  $\mathbb{C}$ . La forme  $\omega = dz/z$  est fermée dans  $D$  mais n'y admet pas de primitive.*

En effet, au voisinage de chaque point  $z_0 \neq 0$ , il existe une détermination de  $\log z$  et cette détermination est, au voisinage de  $z_0$ , une primitive de  $dz/z$ . Donc  $\omega$  est fermée. Pour montrer que  $\omega$  n'admet cependant pas de primitive dans  $D$ , il suffit de trouver un chemin fermé  $\gamma$  contenu dans  $D$  et tel que  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} \neq 0$ . Or soit  $\gamma$  le cercle-unité centré à l'origine et parcouru dans le sens direct. Pour calculer  $\int_{\gamma} \omega$ , on pose  $z = e^{it}$ ,  $t$  variant de 0 à  $2\pi$ ; on a

$$dz = ie^{it} dt, \quad \frac{dz}{z} = i dt,$$

et par suite

$$(4. 1) \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i dt = 2i\pi \neq 0.$$

C.Q.F.D.

Dans l'exemple précédent la forme  $\omega$  est complexe. Prenons maintenant la partie imaginaire de  $\omega$ . Puisque

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx - i dy}{x + iy} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

la forme différentielle

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

est fermée dans le plan privé de l'origine. Elle n'admet pas de primitive, car d'après (4. 1) on a

$$\int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

si  $\gamma$  est le cercle-unité parcouru dans le sens direct. En fait,  $\omega$  est la différentielle de  $\text{arc tg } \frac{y}{x}$ , qui est une fonction *multiforme* (c'est-à-dire avec plusieurs déterminations) dans le plan privé de l'origine.

## 5. ÉTUDE DES PRIMITIVES NON UNIFORMES

Soit  $\omega$  une forme fermée définie dans un ouvert connexe  $D$ . Bien que  $\omega$  n'ait pas nécessairement de primitive (uniforme) dans  $D$ , on va définir ce qu'on entend par *primitive de  $\omega$  le long d'un chemin  $\gamma$*  de  $D$ . Un tel chemin est défini par une application *continue* d'un segment  $I = [a, b]$  dans  $D$ ; on ne fait ici aucune hypothèse de différentiabilité.

*Définition.* Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  un chemin contenu dans un ouvert  $D$ , et soit  $\omega$  une forme différentielle fermée dans  $D$ . On appelle *primitive de  $\omega$  le long de  $\gamma$*  une fonction continue  $f(t)$  ( $t$  parcourant  $[a, b]$ ) qui satisfait à la condition suivante :

(P) *quel que soit  $\tau \in [a, b]$ , il existe au voisinage du point  $\gamma(\tau) \in D$  une primitive  $F$  de  $\omega$  telle que l'on ait*

$$(5. 1) \quad F(\gamma(t)) = f(t)$$

pour  $t$  assez voisin de  $\tau$ .

**THÉORÈME 1.** *Une telle primitive  $f$  existe toujours et est unique à l'addition près d'une constante.*

*Démonstration.* Tout d'abord, si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux telles primitives, la différence  $f_1(t) - f_2(t)$  est, d'après (5. 1), au voisinage de chaque  $\tau \in [a, b]$ , de la forme  $F_1(\gamma(t)) - F_2(\gamma(t))$ ; comme la différence  $F_1 - F_2$  des deux

primitives de  $\omega$  est constante, il s'ensuit que la fonction  $f_1(t) - f_2(t)$  est constante au voisinage de chaque point du segment I. Nous exprimerons cela en disant que la fonction  $f_1 - f_2$  est *localement constante*. Or une fonction continue et localement constante sur un espace topologique *connexe* (ici, sur le segment  $I = [a, b]$ ) est *constante*. En effet, pour tout nombre  $u$ , l'ensemble des points de l'espace où la fonction est égale à  $u$  est à la fois ouvert et fermé.

Il reste à montrer l'existence d'une fonction continue  $f(t)$  satisfaisant à la condition (P). Chaque point  $\tau \in I$  admet un voisinage  $V$  (dans I) que  $\gamma$  applique dans un disque ouvert où  $\omega$  possède une primitive  $F$ . Puisque I est compact, on peut trouver une suite finie de points

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b,$$

de façon que, pour chaque entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq n$ ,  $\gamma$  applique le segment  $[t_i, t_{i+1}]$  dans un disque ouvert  $U_i$  dans lequel existe une primitive  $F_i$  de  $\omega$ . L'intersection  $U_i \cap U_{i+1}$  contient  $\gamma(t_{i+1})$ , donc n'est pas vide; elle est connexe, donc  $F_{i+1} - F_i$  est constante dans  $U_i \cap U_{i+1}$ . On peut donc, en ajoutant à chaque  $F_i$  une constante convenable, faire en sorte, de proche en proche, que  $F_{i+1}$  coïncide avec  $F_i$  dans  $U_i \cap U_{i+1}$ . Soit alors  $f(t)$  la fonction définie par

$$f(t) = F_i(\gamma(t)) \quad \text{pour} \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Il est évident que  $f(t)$  est continue et satisfait à la condition (P) : c'est clair pour une valeur  $\tau$  différente des  $t_i$ ; le lecteur le vérifiera lorsque  $\tau$  est égal à l'un des  $t_i$ .

*Remarque.* Supposons que  $\gamma$  soit différentiable par morceaux, autrement dit que l'on ait une subdivision de I telle que la restriction de  $\gamma$  à chaque segment partiel  $[t_i, t_{i+1}]$  soit continûment différentiable. Alors l'intégrale  $\int_{\gamma} \omega$  est définie; c'est par définition

$$\sum_i \left( \int_{\gamma_i} \omega \right).$$

Si  $f$  est une primitive le long de  $\gamma$ , on a, d'après la formule (2. 1),

$$\int_{\gamma_i} \omega = f(t_{i+1}) - f(t_i),$$

d'où en ajoutant

$$(5. 2) \quad \int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a).$$

Ceci conduit à définir  $\int_{\gamma} \omega$  même pour un chemin *continu*  $\gamma$ , sans hypothèse



de différentiabilité relative à  $\gamma$  : on prend la relation (5. 2) comme *définition*, ce qui est licite car le second membre ne dépend pas du choix de la primitive  $f$  le long de  $\gamma$ .

PROPOSITION 5. 1. Si  $\gamma$  est un chemin fermé ne passant pas par l'origine,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$  est un entier.

Démonstration.  $\omega = \frac{dz}{z}$  est une forme fermée. Dans la démonstration du théorème 1, on peut supposer que chaque  $F_i$  est une détermination de  $\log z$ . Donc  $f(b) - f(a)$  est la différence de deux déterminations de  $\log z$  au point  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , et par suite est de la forme  $2\pi in$ , où  $n$  est entier.

COROLLAIRE.  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  est un entier (le même que précédemment).

La quantité  $\int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  s'appelle souvent la *variation de l'argument* du point  $z = x + iy$  lorsque ce point décrit le chemin  $\gamma$  (que  $\gamma$  soit fermé ou non).

## 6. HOMOTOPIE

Pour simplifier, tous les chemins qu'on va considérer seront paramétrés par le segment  $I = [0, 1]$ .

Définition. On dit que deux chemins

$$\gamma_0 : I \rightarrow D \quad \text{et} \quad \gamma_1 : I \rightarrow D$$

ayant même origine et même extrémité (c'est-à-dire  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ ,  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ ) sont *homotopes* (dans  $D$ ) avec *extrémités fixes*, s'il existe une application continue  $(t, u) \rightarrow \delta(t, u)$  de  $I \times I$  dans  $D$ , telle que

$$(6. 1) \quad \begin{cases} \delta(t, 0) = \gamma_0(t), & \delta(t, 1) = \gamma_1(t), \\ \delta(0, u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), & \delta(1, u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1). \end{cases}$$

$u$  étant fixé, l'application  $t \rightarrow \delta(t, u)$  est un chemin  $\gamma_u$  de  $D$ , ayant même origine que l'origine commune de  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , et même extrémité que l'extrémité commune de  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ . Intuitivement ce chemin se déforme continûment quand  $u$  varie de 0 à 1, ses extrémités restant fixes.

On a une définition analogue, concernant le cas de deux chemins fermés  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  : on dit qu'ils sont *homotopes* (dans  $D$ ) comme chemins fermés s'il existe une application continue  $(t, u) \rightarrow \delta(t, u)$  de  $I \times I$  dans  $D$ , telle que

$$(6. 2) \quad \begin{cases} \delta(t, 0) = \gamma_0(t), & \delta(t, 1) = \gamma_1(t), \\ \delta(0, u) = \delta(1, u) & \text{quel que soit } u, \end{cases}$$

(donc, pour chaque  $u$ , le chemin  $\gamma_u$  est un chemin fermé). En particulier, on dit qu'un chemin fermé  $\gamma_0$  est *homotope à un point* dans  $D$  si l'on est dans la situation précédente, la fonction  $\gamma_1(t)$  étant en outre constante.

**THÉORÈME 2.** *Si  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont deux chemins de  $D$  homotopes avec extrémités fixes, on a*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

quelle que soit la forme fermée  $\omega$  dans  $D$ .

**THÉORÈME 2 bis.** *Si  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont deux chemins fermés de  $D$ , homotopes comme chemins fermés, on a*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

pour toute forme fermée  $\omega$  dans  $D$ .

Ces deux théorèmes vont se démontrer comme conséquence d'un lemme qu'on va exposer maintenant. Tout d'abord voici une

*Définition.* Soit  $(t, u) \rightarrow \delta(t, u)$  une application continue d'un rectangle

$$(6.3) \quad a \leq t \leq b, \quad a' \leq u \leq b'$$

dans l'ouvert  $D$ ; et soit  $\omega$  une forme fermée dans  $D$ . On appelle *primitive de  $\omega$  suivant l'application  $\delta$*  une fonction  $f(t, u)$  continue dans le rectangle, et satisfaisant à la condition suivante :

(P') *quel que soit le point  $(\tau, \upsilon)$  du rectangle, il existe au voisinage de  $\delta(\tau, \upsilon)$  une primitive  $F$  de  $\omega$  telle que l'on ait*

$$F(\delta(t, u)) = f(t, u)$$

en tout point  $(t, u)$  assez voisin de  $(\tau, \upsilon)$ .

**LEMME.** *Une telle primitive existe toujours et est unique à l'addition près d'une constante.*

Ce lemme est en quelque sorte une extension du théorème 1. On va le démontrer d'une manière analogue. En utilisant la compacité du rectangle, on peut en faire un quadrillage en subdivisant l'intervalle de variation de  $t$  par des points  $t_i$  et l'intervalle de variation de  $u$  par des points  $u_j$ , de façon que, quels que soient  $i$  et  $j$ , le petit rectangle, produit des segments  $[t_i, t_{i+1}]$  et  $[u_j, u_{j+1}]$ , soit appliqué par  $\delta$  dans un disque ouvert  $U_{i,j}$  dans lequel existe une primitive  $F_{i,j}$  de  $\omega$ .

Fixons  $j$ ; comme l'intersection  $U_{i,j} \cap U_{i+1,j}$  n'est pas vide (et est connexe), on peut ajouter à chaque  $F_{i,j}$  ( $j$  fixe,  $i$  variable) une constante de manière

que  $F_{i,j}$  et  $F_{i+1,j}$  coïncident dans  $U_{i,j} \cap U_{i+1,j}$ ; on obtient alors, pour  $u \in [u_j, u_{j+1}]$ , une fonction  $f_j(t, u)$  telle que, pour tout  $i$ , on ait

$$f_j(t, u) = F_{i,j}(\delta(t, u)) \quad \text{lorsque} \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Ainsi  $f_j(t, u)$  est continue dans le rectangle

$$a \leq t \leq b, \quad u_j \leq u \leq u_{j+1},$$

et c'est une primitive de  $\omega$  suivant l'application  $\delta_j$ , restriction de  $\delta$  au rectangle précédent. Chaque fonction  $f_j$  est définie à une constante additive près; on peut alors, par récurrence sur  $j$ , choisir ces constantes additives de façon que les fonctions  $f_j(t, u)$  et  $f_{j+1}(t, u)$  soient égales lorsque  $u = u_{j+1}$ . Soit maintenant  $f(t, u)$  la fonction définie dans le rectangle (6. 3) par la condition que, pour tout  $j$ , on ait

$$f(t, u) = f_j(t, u) \quad \text{lorsque} \quad u \in [u_j, u_{j+1}].$$

C'est une fonction continue qui satisfait à la condition (P'), donc c'est bien une primitive de  $\omega$  suivant l'application  $\delta$ . Le lemme est ainsi démontré.

*Démonstration du théorème 2.* Soit  $\delta$  une application continue satisfaisant aux conditions (6. 1). Soit  $f$  une primitive de  $\omega$  suivant  $\delta$ . Il est évident que  $f$  est constante sur les côtés verticaux  $t = 0$  et  $t = 1$  du rectangle  $I \times I$ . On a donc

$$f(0, 0) = f(0, 1), \quad f(1, 0) = f(1, 1),$$

et comme

$$\int_0^1 \omega = f(1, 0) - f(0, 0), \quad \int_1^0 \omega = f(1, 1) - f(0, 1),$$

le théorème 2 est démontré.

La démonstration du théorème 2 bis est tout à fait analogue; on utilise une application  $\delta$  satisfaisant à (6. 2).

## 7. PRIMITIVES DANS UN OUVERT SIMPLEMENT CONNEXE

*Définition.* On dit qu'un ouvert  $D$  est *simplement connexe* s'il est connexe et si en outre tout chemin fermé contenu dans  $D$  est homotope à un point dans  $D$ .

**THÉORÈME 3.** *Toute forme différentielle fermée  $\omega$  dans un ouvert simplement connexe  $D$  possède une primitive dans  $D$ .*

En effet, d'après le théorème 2 bis, on a  $\int_\gamma \omega = 0$  pour tout chemin fermé  $\gamma$

contenu dans  $D$ , ce qui, en vertu de la proposition 2. 1, entraîne que  $\omega$  admet une primitive dans  $D$ .

En particulier, dans tout ouvert simplement connexe ne contenant pas  $O$ , la forme fermée  $dz/z$  admet une primitive; autrement dit,  $\log z$  admet une détermination dans tout ouvert simplement connexe ne contenant pas  $O$ .

*Exemples d'ouverts simplement connexes.* On dit qu'un ensemble  $E$  du plan est étoilé par rapport à l'un de ses points  $a$  si, quel que soit le point  $z \in E$ , le segment de droite joignant  $a$  à  $z$  est contenu dans  $E$ .

Tout ouvert  $D$  étoilé par rapport à l'un de ses points  $a$  est simplement connexe : en effet  $D$  est évidemment connexe; de plus, pour chaque nombre réel  $u$  compris entre 0 et 1, l'homothétie de centre  $a$  et de rapport  $u$  transforme  $D$  en lui-même; lorsque  $u$  décroît de 1 à 0, cette homothétie définit une homotopie de n'importe quelle courbe fermée à un point.

En particulier, tout ouvert convexe  $D$  est simplement connexe. En effet, un ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points.

En revanche, le plan privé de l'origine n'est pas simplement connexe : par exemple, le cercle  $|z| = 1$  n'est pas homotope à un point dans  $\mathbb{C} - \{0\}$  puisque l'intégrale  $\int \frac{dz}{z}$  de la forme fermée  $\frac{dz}{z}$  le long de ce cercle n'est pas nulle (cf. la relation (4. 1)).

A titre d'exercice, le lecteur pourra démontrer l'équivalence des quatre propriétés suivantes (pour un ouvert connexe  $D$ ) :

- $D$  est simplement connexe;
- toute application continue du cercle  $|z| = 1$  dans  $D$  se laisse prolonger en une application continue du disque  $|z| \leq 1$  dans  $D$ ;
- toute application continue du bord d'un carré dans  $D$  se laisse prolonger en une application continue du carré dans  $D$ ;
- si deux chemins de  $D$  ont même extrémités, ils sont homotopes avec extrémités fixes.

## 8. INDICE D'UN CHEMIN FERMÉ

*Définition.* Soit  $\gamma$  un chemin fermé dans le plan  $\mathbb{C}$ , et soit  $a$  un point de  $\mathbb{C}$  n'appartenant pas à l'image de  $\gamma$ . On appelle *indice* de  $\gamma$  par rapport à  $a$  et on note  $I(\gamma, a)$ , la valeur de l'intégrale

$$(8. 1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}.$$

D'après la proposition 5. 1, l'indice  $I(\gamma, a)$  est un nombre entier.

En remontant aux définitions, on voit que pour calculer l'indice, on doit chercher une fonction continue  $f(t)$ , définie pour  $0 \leq t \leq 1$ , à valeurs complexes, et telle que

$$e^{f(t)} = \gamma(t) - a;$$

on a alors

$$I(\gamma, a) = \frac{f(1) - f(0)}{2\pi i}.$$

#### PROPRIÉTÉS DE L'INDICE

1) *Le point  $a$  étant fixé, l'indice  $I(\gamma, a)$  reste constant lorsque le chemin fermé  $\gamma$  se déforme continûment sans passer par  $a$ . En effet, l'intégrale (8. 1) varie continûment, et sa valeur est à chaque instant un entier; donc elle reste constante.*

2) *Le chemin fermé  $\gamma$  étant fixé, l'indice  $I(\gamma, a)$  est une fonction localement constante de  $a$  lorsque  $a$  varie dans le complémentaire de l'image de  $\gamma$ . Même démonstration que pour 1). Il s'ensuit que  $I(\gamma, a)$  est une fonction de  $a$  qui est constante dans chaque composante connexe du complémentaire de l'image de  $\gamma$ .*

3) *Si l'image de  $\gamma$  est contenue dans un ouvert simplement connexe  $D$  ne contenant pas le point  $a$ , l'indice  $I(\gamma, a)$  est nul. En effet, le chemin fermé  $\gamma$  peut se déformer en un point en restant contenu dans  $D$ , donc sans jamais passer par  $a$ ; et il suffit d'appliquer 1).*

4) *si  $\gamma$  est un cercle parcouru dans le sens direct, l'indice  $I(\gamma, a)$  est égal à 0 si  $a$  est extérieur au cercle, et est égal à 1 si  $a$  est intérieur au cercle.*

Le cas où  $a$  est extérieur au cercle est justiciable de 3); lorsque  $a$  est intérieur au cercle, il suffit d'examiner le cas où  $a$  est le centre du cercle, en vertu de 2); et alors on applique la relation (4. 1).

**PROPOSITION 8. 1.** *Soit  $f$  une application continue du disque fermé  $x^2 + y^2 \leq r^2$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ ; soit  $\gamma$  la restriction de  $f$  au cercle  $x^2 + y^2 = r^2$ . Si un point  $a$  du plan n'appartient pas à l'image de  $\gamma$  et si l'indice  $I(\gamma, a)$  est  $\neq 0$ , alors  $f$  prend au moins une fois la valeur  $a$  dans le disque ouvert  $x^2 + y^2 < r^2$ .*

En effet, raisonnons par l'absurde, en supposant que  $f$  ne prenne pas la valeur  $a$ . La restriction de  $f$  aux cercles concentriques de centre  $o$  définit une déformation continue du chemin fermé  $\gamma$  en un point. Par conséquent l'intégrale  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$  est nulle, contrairement à l'hypothèse.

*Définition.* Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins fermés ne passant pas par l'origine  $o$ . On appelle *produit* de ces deux chemins le chemin fermé défini par l'application

$$t \rightarrow \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t),$$

où le point désigne la multiplication des nombres complexes  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$ .

**PROPOSITION 8. 2.** *L'indice, par rapport à l'origine, du produit de deux chemins fermés ne passant pas par 0, est égal à la somme des indices de chacun de ces deux chemins fermés. Autrement dit :*

$$I(\gamma_1\gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0).$$

En effet, soient  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  deux fonctions continues à valeurs complexes telles que

$$e^{f_1(t)} = \gamma_1(t), \quad e^{f_2(t)} = \gamma_2(t).$$

Soit  $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$  le produit des deux courbes fermées; la fonction  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$  satisfait à

$$e^{f(t)} = \gamma(t),$$

et l'on a

$$I(\gamma, 0) = \frac{f(1) - f(0)}{2\pi i} = \frac{f_1(1) - f_1(0)}{2\pi i} + \frac{f_2(1) - f_2(0)}{2\pi i} = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0),$$

ce qui démontre la proposition.

**PROPOSITION 8. 3.** *Soient  $\gamma$  et  $\gamma_1$  deux chemins fermés dans le plan  $\mathbb{C}$ . Si  $\gamma$  ne prend jamais la valeur 0 et si l'on a toujours  $|\gamma_1(t)| < |\gamma(t)|$ , alors l'application  $t \rightarrow \gamma(t) + \gamma_1(t)$  ne prend jamais la valeur 0, et l'on a*

$$I(\gamma + \gamma_1, 0) = I(\gamma, 0).$$

En effet, on peut écrire

$$\gamma(t) + \gamma_1(t) = \gamma(t) \cdot \left( 1 + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)} \right);$$

le chemin fermé  $t \rightarrow 1 + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}$  a un indice nul par rapport à l'origine, puisqu'il est contenu dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1. Ainsi le chemin fermé  $\gamma + \gamma_1$  est le produit des chemins fermés  $\gamma$  et  $1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}$ , et en appliquant la proposition 8. 2, on obtient la proposition 8. 3.

## 9. COMPLÉMENTS : BORD ORIENTÉ D'UN COMPACT

**LEMME.** *Si un chemin  $\gamma$  est continûment différentiable et si la dérivée  $\gamma'$  est partout  $\neq 0$ , alors, au voisinage de chaque valeur du paramètre  $t$ , l'application  $t \rightarrow \gamma(t)$  est injective et son image partage (localement) le plan en deux régions.*

La signification exacte de cet énoncé va être précisée dans la démonstration qui suit. Soit  $t \rightarrow \gamma(t)$  une application continûment différentiable d'un segment  $[a, b]$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ ; supposons que la dérivée  $\gamma'(t)$  soit  $\neq 0$  pour toute valeur de  $t$ . Les coordonnées  $x, y$  du point  $\gamma(t)$  sont donc des fonctions continûment dérivables  $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ , et leurs dérivées  $\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)$  ne s'annulent pas simultanément. Le théorème des fonctions implicites montre alors que si  $t_0$  est un point intérieur à l'intervalle (c'est-à-dire  $a < t_0 < b$ ), et si on note  $x_0 = \gamma_1(t_0), y_0 = \gamma_2(t_0)$ , il existe une application continûment différentiable  $(t, u) \rightarrow \delta(t, u)$  d'un voisinage ouvert  $U$  du point  $(t_0, 0)$  sur un voisinage ouvert  $V$  du point  $(x_0, y_0)$ , qui satisfait aux conditions suivantes :

(i)  $\delta(t, 0) = \gamma(t)$ ;

(ii)  $\delta$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $V$ , dont le jacobien est  $> 0$  en tout point de  $U$  (donc  $\delta$  conserve l'« orientation »).

Ainsi, par l'homéomorphisme réciproque de  $\delta$ ,  $V$  s'applique homéomorphiquement sur  $U$ , les points du chemin  $\gamma$  venant sur les points de la droite

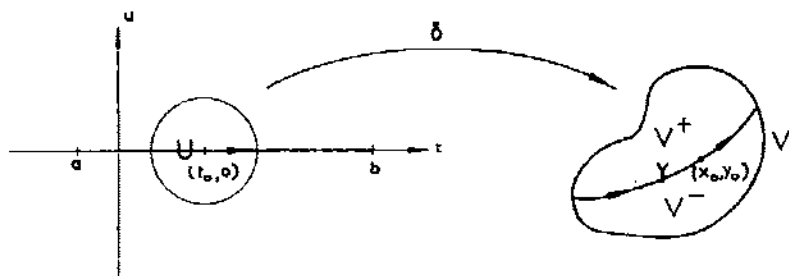


figure 2

$u = 0$ . Les points du complémentaire de  $\gamma$  dans  $V$  se répartissent donc en deux ensembles ouverts  $V^+$  et  $V^-$  : ceux pour lesquels  $u$  est  $> 0$ , et ceux pour lesquels  $u$  est  $< 0$ . Si on a pris pour  $U$  un disque ouvert de centre  $(t_0, 0)$ , les ouverts  $V^+$  et  $V^-$  sont connexes. Ainsi le chemin  $\gamma$  partage l'ouvert  $V$  en deux composantes connexes, ce qui justifie l'énoncé du lemme.

*Définition.* Soit  $K$  un compact du plan  $\mathbb{C}$ , et soit  $\Gamma = (\Gamma_i)_{i \in I}$  un ensemble fini de chemins *fermés*  $\Gamma_i$ , dont chacun est différentiable par morceaux. On dit que  $\Gamma$  est le *bord orienté* du compact  $K$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

(BO 1) dans chaque application  $t \rightarrow \Gamma_i(t)$  les images de deux points distincts sont distinctes, exception faite de l'image de l'origine et de l'extré-

mité du segment de définition. De plus les images des divers  $\Gamma_i$  sont deux à deux disjointes et leur réunion constitue la *frontière* de  $K$ ;

(BO 2) si  $\gamma$  est un arc différentiable de l'un quelconque des  $\Gamma_i$ , la dérivée  $\gamma'(t)$  est partout  $\neq 0$ ; de plus, si  $t_0$  est intérieur à l'intervalle de définition de  $\gamma$ , et si l'ouvert  $V$  du lemme précédent a été choisi assez petit, alors  $V^-$  ne rencontre pas  $K$ , tandis que  $V^+$  est contenu dans l'intérieur de  $K$ .

D'une manière imaginée, la condition (BO 2) s'exprime en disant que lorsqu'on parcourt  $\gamma$  dans le sens des  $t$  croissants, on a constamment à sa gauche les points de l'intérieur de  $K$ , tandis qu'à sa droite on a des points qui sont dans le complémentaire de  $K$ .

*Exemple.* Prenons pour  $K$  un rectangle (fermé) dont les côtés sont parallèles aux axes; alors le périmètre de ce rectangle, tel qu'il a été défini à la fin du n° 1, est bien le *bord orienté* de  $K$ .

Nous admettrons sans démonstration que la formule de Green-Riemann s'applique au bord orienté  $\Gamma$  d'un compact  $K$ . D'une façon précise, si  $\omega = P dx + Q dy$  est une forme différentielle à coefficients continûment différentiables dans un ouvert contenant le compact  $K$ , on a l'égalité

$$(9. 1) \quad \int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

(la notation  $\int_{\Gamma}$  désigne  $\sum_i \int_{\Gamma_i}$ , si  $\Gamma$  se compose de chemins fermés  $\Gamma_i$ ).

En particulier, si la forme  $\omega$  est fermée dans  $D$ , on a la relation

$$(9. 2) \quad \int_{\Gamma} \omega = 0$$

chaque fois que  $\Gamma$  est le bord orienté d'un compact contenu dans  $D$ .

## 2. Fonctions holomorphes; théorèmes fondamentaux

### 1. RAPPEL SUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

Soit  $D$  un ouvert du plan  $\mathbb{R}^2$ , et soit  $f(x, y)$  une fonction définie dans  $D$  et à valeurs réelles ou complexes. On dit que  $f$  est *différentiable* au point  $(x_0, y_0) \in D$ , s'il existe une fonction linéaire  $ah + bk$  des variables réelles  $h$  et  $k$ , telle que l'on ait la relation

$$(1. 1) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \alpha \sqrt{h^2 + k^2},$$

chaque fois que  $h$  et  $k$  sont assez petits;  $\alpha$  désigne un scalaire (réel ou



complexe), fonction de  $h$  et  $k$ , dont la valeur absolue tend vers 0 lorsque  $\sqrt{h^2 + k^2}$  tend vers 0. Si  $f$  est différentiable au point  $(x_0, y_0)$ , les constantes (réelles ou complexes)  $a$  et  $b$  sont déterminées de manière unique, et sont égales aux dérivées partielles

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Rappelons que l'existence des dérivées partielles de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  n'est pas suffisante pour que la fonction soit différentiable en ce point; mais si  $f$  possède en tout point suffisamment voisin de  $(x_0, y_0)$  des dérivées partielles, et si ces dérivées partielles sont continues au point  $(x_0, y_0)$ , alors  $f$  est différentiable en ce point. Une fonction qui admet des dérivées partielles continues dans un ouvert  $D$  est dite continûment différentiable dans  $D$ .

## 2. CONDITION D'HOLOMORPHIE

Soit  $D$  un ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$ , et soit  $f$  une fonction de la variable complexe  $z = x + iy$  définie dans  $D$ .

*Définition.* On dit que  $f(z)$  est *holomorphe* au point  $z_0 \in D$  si

$$(2.1) \quad \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u} \text{ existe}$$

( $u$  désigne un nombre complexe variable). Il revient au même de dire que  $f$  possède au point  $z_0$  une *dérivée* par rapport à la variable complexe. On dit que  $f$  est holomorphe dans l'ouvert  $D$  si elle est holomorphe en chaque point de  $D$ .

La condition (2.1) peut aussi s'écrire

$$(2.2) \quad f(z_0 + u) - f(z_0) = cu + \alpha(u)|u|,$$

où  $\alpha(u)$  tend vers 0 lorsque  $u$  tend vers 0;  $c$  est la dérivée  $f'(z_0)$ . Puisque  $z = x + iy$ , la relation (2.2) s'écrit aussi

$$(2.3) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = c(h + ik) + \alpha(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}.$$

Ceci montre que  $f$ , considérée comme fonction des deux variables réelles  $x$  et  $y$ , est différentiable, et que

$$a = c, \quad b = ic,$$

$a$  et  $b$  désignant les constantes de la relation (1. 1). On a donc  $\frac{\partial f}{\partial x} = c$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = ic$ , d'où

$$(2. 4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Réciproquement, soit  $f$  une fonction différentiable des variables réelles  $x$  et  $y$  satisfaisant à (2. 4). Alors la relation (1. 1) entraîne (2. 3), avec  $c = a$ ,  $ic = b$ . Donc  $f$  est holomorphe au point  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Nous avons donc démontré la proposition suivante :

**PROPOSITION 2. 1.** *Pour que  $f$  soit holomorphe en un point, il faut et il suffit que  $f$ , considérée comme fonction des deux variables réelles  $x$  et  $y$ , soit différentiable en ce point et que l'on ait la relation (2. 4) entre les dérivées partielles de  $f$  en ce point.*

Explicitons (2. 4). Lorsqu'on écrit  $f = P + iQ$ , les fonctions  $P$  et  $Q$  étant réelles, on obtient les conditions de Cauchy

$$(2. 5) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

### 3. INTRODUCTION DES VARIABLES $z$ ET $\bar{z}$

Soit  $f$  une fonction (à valeurs réelles ou complexes) différentiable des variables réelles  $x$  et  $y$ .

Considérons la différentielle

$$(3. 1) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Les fonctions particulières  $z = x + iy$  et  $\bar{z} = x - iy$  admettent les différentielles

$$(3. 2) \quad dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy;$$

on a donc inversement

$$(3. 3) \quad dx = \frac{1}{2} (dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i} (dz - d\bar{z}).$$

En portant ceci dans (3. 1) on obtient la relation

$$df = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}.$$

Ceci conduit à introduire les symboles

$$(3. 4) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Avec ces notations, on obtient la relation

$$(3. 5) \quad df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

La condition (2. 4) qui exprime que  $f$  est une fonction holomorphe de la variable complexe  $z$  s'écrit alors

$$(3. 6) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Autrement dit, pour que  $f$  soit holomorphe il faut et il suffit que, dans l'expression (3. 5) de la différentielle  $df$ , le coefficient de  $d\bar{z}$  soit nul. Ou encore :  $df$  doit être proportionnelle à  $dz$ ; le coefficient de proportionnalité est alors simplement la dérivée  $f'(z)$ .

Comme application, démontrons le résultat suivant : *Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert connexe  $D$ ; si la partie réelle de  $f$  est constante,  $f$  est constante.*

En effet, la partie réelle  $\operatorname{Re}(f)$  n'est autre que  $\frac{1}{2}(f + \bar{f})$ ; par hypothèse on a, dans  $D$ ,  $d(f + \bar{f}) = 0$ , ce qui s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 0.$$

Mais puisque  $f$  est holomorphe, on a  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ; par passage à l'imaginaire conjugué, on a  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$ . Ainsi, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 0.$$

Or une expression  $a dz + b d\bar{z}$  ne peut être identiquement nulle que si les coefficients  $a$  et  $b$  sont nuls, ce qui donne  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$ . Ainsi  $df = 0$ , et  $f$  est constante dans  $D$ .

De là on déduit que si  $f$  est holomorphe et  $\neq 0$  dans un ouvert connexe  $D$ , et si  $\log |f|$  est constant, ou si  $\arg f$  est constant, alors  $f$  est constante.

En effet, considérons la fonction :

$$g(z) = \log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z).$$

Plaçons-nous au voisinage d'un point  $z_0$  où nous choisissons une détermination de l'argument;  $g$  est holomorphe et sa partie réelle (ou sa partie imaginaire) est constante. Donc  $g$  est constante au voisinage de  $z_0$ . Ainsi  $f = e^g$  est localement constante dans  $D$ , et par suite est constante puisque  $D$  est connexe.

## 4. THÉORÈME DE CAUCHY

THÉORÈME 1. Si  $f(z)$  est holomorphe dans un ouvert  $D$  du plan complexe, la forme différentielle  $f(z) dz$  est fermée dans  $D$ .

En raison de l'importance de ce théorème, nous allons en donner deux démonstrations :

*Première démonstration.* Cette démonstration suppose une hypothèse supplémentaire. On va supposer que les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues dans  $D$ . (En réalité, il résultera de la deuxième démonstration que cette hypothèse est automatiquement vérifiée dès que  $f$  est holomorphe.) Pour vérifier que la forme différentielle  $f(z) dz = f(z) dx + if(z) dy$  est fermée, il suffit, d'après la formule de Green-Riemann (§ 1, formule (3. 1)) de vérifier que l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Or c'est précisément la condition (2. 4) qui exprime que  $f$  est holomorphe, et la démonstration est achevée.

*Deuxième démonstration.* Cette démonstration, contrairement à la première, ne nécessite aucune hypothèse supplémentaire, mais elle exige un raisonnement plus subtil. Pour montrer que  $f(z) dz$  est fermée, nous devons prouver que l'intégrale  $\int_{\gamma} f(z) dz$  est nulle le long du bord  $\gamma$  de n'importe quel rectangle  $R$  contenu dans  $D$  ( $\gamma$  compris son intérieur). Pour cela posons a priori :

$$(4. 1) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \alpha(R).$$

Partageons le rectangle  $R$  en quatre rectangles égaux, en subdivisant chacun de ses côtés en deux parties égales. Soient  $\gamma_i$  les bords (orientés)

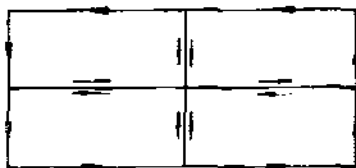


Figure 3

des quatre rectangles partiels ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). On vérifie facilement (cf. fig. 3) que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \alpha(R_i).$$

Donc parmi ces quatre rectangles il y en a au moins un tel que  $|\alpha(R_i)| \geq \frac{1}{4} |\alpha(R)|$ . Appelons  $R^{(1)}$  ce rectangle. Partageons à nouveau le rectangle  $R^{(1)}$  en quatre rectangles égaux; l'un au moins d'entre eux, soit  $R^{(2)}$ , satisfera à la condition

$$|\alpha(R^{(2)})| \geq \frac{1}{4^2} |\alpha(R)|.$$

On peut recommencer indéfiniment cette opération. On obtiendra ainsi une suite de rectangles emboîtés; le  $k$ -ième  $R^{(k)}$  aura ses côtés  $2^k$  fois plus petits que ceux du rectangle  $R$ , et son aire sera donc  $4^k$  fois plus petite que celle du rectangle  $R$ . Si  $\gamma(R^{(k)})$  désigne le bord orienté du rectangle  $R^{(k)}$ , on a

$$(4.2) \quad \left| \int_{\gamma(R^{(k)})} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^k} |\alpha(R)|.$$

D'après le critère de convergence de Cauchy, il existe un point  $z_0$  et un seul commun à tous les rectangles  $R^{(k)}$ . Évidemment  $z_0 \in D$ . Donc  $f(z)$  est holomorphe au point  $z_0$ , et par suite :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|,$$

avec

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z) = 0.$$

On en déduit

$$(4.3) \quad \left\{ \int_{\gamma(R^{(k)})} f(z) dz = f(z_0) \int_{\gamma(R^{(k)})} dz + f'(z_0) \int_{\gamma(R^{(k)})} (z - z_0) dz + \int_{\gamma(R^{(k)})} \varepsilon(z) |z - z_0| dz. \right.$$

Dans le second membre de (4.3), les deux premières intégrales sont nulles et la troisième est négligeable devant l'aire du rectangle  $R^{(k)}$  lorsque  $k$  augmente indéfiniment; elle est donc négligeable devant  $\frac{1}{4^k}$ . En comparant avec (4.2), on voit qu'on a nécessairement  $\alpha(R) = 0$ ; par suite, d'après la définition même de  $\alpha(R)$ , on a  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . Ceci achève la démonstration.

**COROLLAIRE. 1.** Une fonction  $f(z)$  holomorphe dans  $D$  admet localement une primitive qui est holomorphe.

Cette assertion exprime que tout point de  $D$  possède un voisinage ouvert dans lequel  $f$  admet une primitive holomorphe. L'existence locale d'une primitive résulte de la définition d'une forme fermée; et la primitive locale est bien holomorphe, puisqu'elle a pour dérivée  $f$ .

COROLLAIRE. 2. Si  $f(z)$  est holomorphe dans  $D$ , on a  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  pour tout chemin fermé  $\gamma$  de  $D$  qui est homotope à un point dans  $D$ .

Cela résulte du théorème 1 ci-dessus, et du théorème 2 bis du § 1, n° 6.

Généralisation. On va étendre la condition de validité du théorème 1.

THÉORÈME 1 bis. Soit  $f(z)$  une fonction continue dans un ouvert  $D$ , et holomorphe en tout point de  $D$  sauf peut-être aux points d'une droite  $\Delta$  parallèle à l'axe réel. Alors la forme  $f(z) dz$  est fermée. En particulier, si  $f$  est holomorphe en tout point de  $D$  sauf peut-être en des points isolés, la forme  $f(z) dz$  est fermée.

Démonstration. On doit prouver que l'intégrale  $\int_{\gamma} f(z) dz$  est nulle pour le bord  $\gamma$  de tout rectangle contenu dans  $D$ . Or ceci est évident si le rectangle ne rencontre pas la droite  $\Delta$ . Supposons que le rectangle ait un côté porté par  $\Delta$ , et soient  $u, u + a, u + ib, u + a + ib$  les quatre sommets du rectangle,  $u$  et  $u + a$  étant sur  $\Delta$ ;  $a$  et  $b$  sont réels, et on supposera par exemple  $b > 0$ . Soit  $R(\varepsilon)$  le rectangle ayant pour sommets

$$u + i\varepsilon, \quad u + a + i\varepsilon, \quad u + ib, \quad u + a + ib,$$

$\varepsilon$  étant un nombre  $> 0$  très petit; l'intégrale  $\int_{\gamma} f(z) dz$  étendue au bord de  $R(\varepsilon)$  est nulle; or, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, cette intégrale tend vers l'intégrale étendue au bord  $\gamma$  du rectangle  $R$ . Donc  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . Enfin, si la droite  $\Delta$  rencontre le rectangle  $R$  sans porter l'un de ses côtés horizontaux, la droite  $\Delta$  partage  $R$  en deux rectangles  $R'$  et  $R''$ , l'intégrale  $\int f(z) dz$  étendue au bord de chacun des rectangles  $R'$  et  $R''$  est nulle, d'après ce qui précède; or la somme de ces intégrales est égale à l'intégrale  $\int f(z) dz$  étendue au bord de  $R$ . Ceci achève la démonstration.

## 5. FORMULE INTÉGRALE DE CAUCHY

THÉORÈME 2. Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $D$ . Soit  $a \in D$ , et soit  $\gamma$  un chemin fermé de  $D$ , ne passant pas par  $a$  et homotope à un point dans  $D$ . On a alors

$$(5.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - a} = I(\gamma, a) f(a),$$

ou  $I(\gamma, a)$  désigne l'indice du chemin fermé  $\gamma$  par rapport au point  $a$  (cf. § 1, n° 8).

*Démonstration.* Soit  $g(z)$  la fonction définie dans  $D$  par

$$\begin{cases} g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{pour } z \neq a, \\ g(z) = f'(a) & \text{pour } z = a; \end{cases}$$

la fonction  $g$  est continue, en raison de la définition de la dérivée. Elle est holomorphe en tout point de  $D$  autre que le point  $a$ . D'après le théorème 1 bis, on a

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0.$$

Or

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(a) dz}{z - a} = I(\gamma, a) f(a),$$

d'après la définition de l'indice. Ceci établit la relation (5. 1).

*Exemple.* Soit  $f$  une fonction holomorphe dans le voisinage d'un disque fermé, et soit  $\gamma$  le bord du disque parcouru dans le sens direct. On a

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - a} = \begin{cases} 2\pi i f(a) & \text{si } a \text{ est intérieur au disque,} \\ 0 & \text{si } a \text{ est extérieur au disque.} \end{cases}$$

## 6. DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

**THÉORÈME 3.** Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans un disque ouvert  $|z| < \rho$ ; alors  $f$  est développable en série entière dans ce disque.

Cela veut dire qu'il existe une série entière  $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  dont le rayon de convergence est  $\geq \rho$  et dont la somme  $S(z)$  est égale à  $f(z)$  pour  $|z| < \rho$ .

*Démonstration.* Soit  $r < \rho$ . On va trouver une série entière qui converge normalement vers  $f(z)$  pour  $|z| \leq r$ . Cette série sera indépendante de  $r$ , en vertu de l'unicité du développement en série entière d'une fonction au voisinage de 0. Le théorème en résultera donc.

Choisissons un  $r_0$  tel que  $r < r_0 < \rho$ . On va appliquer la formule intégrale du théorème 2, en prenant pour  $\gamma$  le cercle de centre 0 et de rayon  $r_0$ , parcouru dans le sens direct :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t - z} \quad \text{pour } |z| \leq r.$$

La fonction  $\frac{1}{t - z}$  qui figure sous le signe d'intégration peut être développée en série, compte tenu du fait que  $|z| < |t|$ . D'une façon précise on a

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t} \frac{1}{1 - z/t} = \frac{1}{t} \left( 1 + \frac{z}{t} + \dots + \frac{z^n}{t^{n+1}} + \dots \right);$$

par suite

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n \geq 0} z^n \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt.$$

La série converge normalement pour  $|z| \leq r$  et  $|t| = r_0$ . On peut donc l'intégrer terme à terme, et on obtient une série normalement convergente pour  $|z| \leq r$  :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

où les coefficients  $a_n$  sont donnés par les intégrales

$$(6.1) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_0} \frac{f(t) dt}{t^{n+1}}.$$

Le théorème 3 est ainsi démontré.

*Commentaire.* Le théorème 3 montre que toute fonction holomorphe dans un ouvert  $D$  est *analytique* dans  $D$ . Réciproquement toute fonction analytique dans  $D$  est holomorphe dans  $D$ , puisqu'on sait qu'une fonction analytique admet une dérivée. Ainsi, pour les fonctions d'une variable *complexe*, il y a équivalence entre *holomorphie* et *analyticité*. Si on applique aux fonctions holomorphes les résultats connus pour les fonctions analytiques, on voit qu'une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable, et en particulier continûment dérivable, et que la dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe.

## 7. THÉORÈME DE MORERA

**THÉORÈME 4** (réciproque du théorème 1). *Soit  $f(z)$  une fonction continue dans un ouvert  $D$ . Si la forme différentielle  $f(z) dz$  est fermée, alors la fonction  $f(z)$  est holomorphe dans  $D$ .*

En effet,  $f$  admet localement une primitive  $g$ . Cette primitive est holomorphe, et  $f = g'$  est la dérivée d'une fonction holomorphe, donc est elle-même holomorphe d'après ce qui précède.

**COROLLAIRE.** *Si  $f(z)$  est continue dans  $D$  et holomorphe en tous les points de  $D$  sauf peut-être aux points d'une droite  $\Delta$ ,  $f$  est holomorphe en tout point de  $D$  sans exception.*

En effet, on peut supposer  $\Delta$  parallèle à l'axe réel, en effectuant au besoin une rotation. D'après le théorème 1 bis, la forme  $f(z) dz$  est fermée. Donc, d'après le théorème 4,  $f$  est holomorphe en tout point de  $D$ .

On voit que le théorème 1 bis n'était qu'une généralisation illusoire du théorème 1. Mais nous avons eu besoin de l'établir, pour des raisons techniques de démonstration.



## 8. VARIANTE POUR LA FORMULE INTÉGRALE DE CAUCHY

THÉORÈME 5. Soit  $\Gamma$  le bord orienté d'un compact  $K$  contenu dans un ouvert  $D$  et soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans  $D$ . Alors

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0;$$

si de plus  $a$  est intérieur à  $K$  on a

$$(8. 1) \quad \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

*Démonstration.* La première assertion résulte de la relation (9. 1) du § 1.

Pour démontrer la deuxième assertion, considérons un petit disque ouvert  $S$  de centre  $a$  et dont l'adhérence est intérieure à  $K$ . Le bord orienté du compact  $K - S$  se compose de  $\Gamma$  et du cercle-frontière de  $S$  parcouru dans le sens indirect. Nous dirons que ce bord orienté est la *différence* de  $\Gamma$  et du cercle-frontière  $\gamma$  de  $S$  parcouru dans le sens direct. En appliquant à  $K - S$  et à la fonction  $\frac{f(z)}{z-a}$ , qui est holomorphe dans  $D - \{a\}$ , la première partie du théorème 5, on obtient

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z-a} = \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-a},$$

ce qui, compte tenu du théorème 2, donne la relation (8. 1).

## 9. PRINCIPE DE SYMÉTRIE DE SCHWARZ

On a vu (corollaire du théorème 4) que si  $f(z)$  est continue dans un ouvert  $D$  et holomorphe en tout point de  $D$  sauf peut-être aux points de l'axe réel,  $f$  est holomorphe en tout point de  $D$  sans exception.

Considérons alors un ouvert non vide  $D$ , connexe, *symétrique par rapport à l'axe réel*; soit  $D'$  l'intersection de  $D$  avec le demi-plan fermé  $y \geq 0$ , et soit  $D''$  l'intersection de  $D$  avec le demi-plan  $y \leq 0$ . Supposons donnée une fonction  $f(z)$  continue dans  $D'$ , à valeurs réelles aux points de l'axe réel, et holomorphe aux points de  $D'$  où  $y > 0$ . On va montrer qu'il existe dans  $D$  une fonction holomorphe qui prolonge  $f$ ; une telle fonction est unique, en vertu du principe du prolongement analytique (cf. chap. 1, § 4, n° 3).

Considérons dans  $D''$  la fonction  $g(z)$  définie par la relation

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Cette fonction est continue dans  $D''$ , et on vérifie aussitôt qu'elle est holomorphe en tout point de  $D''$ , non situé sur l'axe réel. La fonction  $h(z)$  égale à

$f(z)$  dans  $D'$  et à  $g(z)$  dans  $D''$  est continue dans  $D$  et holomorphe en tout point de  $D$  non situé sur l'axe réel. Elle est donc holomorphe en tout point de  $D$  sans exception.

On observera que la fonction  $h$  prend des valeurs imaginaires conjuguées (c'est-à-dire symétriques par rapport à l'axe réel) en deux points de  $D$  symétrique à l'axe réel. C'est pourquoi l'on donne à la construction précédente le nom de « principe de symétrie ».

## Exercices

1. a) Soit  $\gamma$  un chemin différentiable par morceaux, et soit  $\bar{\gamma}$  son image par l'application  $z \rightarrow \bar{z}$  (symétrique par rapport à l'axe réel). Montrer que, si  $f(z)$  est une fonction continue sur  $\gamma$ , la fonction  $z \rightarrow \overline{f(\bar{z})}$  est continue sur  $\bar{\gamma}$ , et on a

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz.$$

b) En particulier, si  $\gamma$  est le cercle unité, parcouru dans le sens direct, on a

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z) dz} = - \int_{|z|=1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

2. Soit  $\gamma$  un chemin continu (non nécessairement différentiable par morceaux). Montrer que l'on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (\omega_1 + \omega_2) &= \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2, \\ \int_{\gamma} a\omega &= a \int_{\gamma} \omega, \end{aligned}$$

si  $\omega_1, \omega_2, \omega$  sont des formes fermées,  $a \in \mathbb{C}$ . (Pour la définition du symbole  $\int_{\gamma} \omega$ , voir *Remarque*, § 1, n° 5.)

3. Soit  $\gamma$  un chemin différentiable par morceaux, dont l'image soit contenue dans un ouvert  $D$ , et soit  $\varphi(z)$  une fonction holomorphe dans  $D$ , à valeurs dans un ouvert  $\Delta$  (dans le plan de la variable complexe  $w$ ). Montrer que  $\Gamma = \varphi \circ \gamma$  est un chemin différentiable par morceaux, et que, pour toute fonction continue  $f(w)$ , on a

$$\int_{\Gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz.$$

Cette formule reste-t-elle vraie même dans le cas où  $\gamma$  n'est plus nécessairement différentiable?

4. Soient  $\gamma$  le chemin (différentiable) :  $t \rightarrow \gamma(t) = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , et  $\gamma_n$  le chemin :  $t \rightarrow \gamma_n(t) = (1 - 1/n)re^{it}$ ,  $t$  variant dans le même intervalle. Montrer que si  $f(z)$  est continue dans le disque fermé  $|z| \leq r$ , on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

5. Montrer que, si  $f(z)$  est continue dans le disque fermé  $|z| \leq r$ , holomorphe dans le disque ouvert  $|z| < r$ , on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad \text{pour tout } |z| < r,$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct.

6. Trouver un chemin  $t \rightarrow \gamma(t)$ ,  $t$  variant dans  $[0, 2\pi]$ , ayant pour image l'ellipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  ( $a, b > 0$ ). Calculer de deux façons différentes l'intégrale  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ , et déduire de là

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

7. Soit  $P_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ , à coefficients complexes, et soit  $\gamma_R$  l'image du cercle  $|t| = R$  par l'application  $t \rightarrow z = P_n(t)$ . Montrer que, si  $R$  est assez grand,  $\gamma_R$  ne passe pas par l'origine  $z = 0$ , et que l'on a  $I(\gamma_R, 0) = n$ ; en conclure que  $P_n(t) = 0$  a au moins une racine. (Montrer d'abord que, pour  $R$  assez grand, on a  $|t^n| > |a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0|$  pour  $|t| \geq R$ . Utiliser ensuite la proposition 8. 3 du § 1, pour montrer que  $I(\gamma_R, 0)$  est égal à l'indice, par rapport à l'origine, de l'image du cercle  $|t| = R$  par l'application  $t \rightarrow t^n$ .)

8. Soit  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  une fonction holomorphe dans un ouvert connexe  $D$ . Si on a

$$au(x, y) + bv(x, y) = c \quad \text{dans } D,$$

$a, b$  et  $c$  étant constantes réelles non toutes nulles, alors  $f(z)$  est constante dans  $D$ .

9. Soit  $D$  un ouvert convexe dans le plan, et soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans  $D$ . Montrer que, pour tout couple de points  $a, b \in D$ , on

peut trouver deux points  $c$  et  $d$  sur le segment joignant  $a$  et  $b$ , tels que l'on ait

$$f(a) - f(b) = (a - b) (\operatorname{Re}(f'(c)) + i \operatorname{Im}(f'(d))).$$

(Considérer la fonction d'une variable réelle  $t$  définie par

$$F(t) = f(b + (a - b)t)/(a - b),$$

et appliquer le théorème des accroissements finis aux parties réelle et imaginaire de  $F(t)$ .)

10. Soit  $D$  un ouvert connexe, symétrique par rapport à l'axe réel, ayant une intersection non vide  $I$  avec ce dernier. Toute fonction  $f(z)$  holomorphe dans  $D$  peut se mettre, d'une façon et d'une seule, sous la forme :

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{pour tout } z \in D,$$

où  $g$  et  $h$  sont deux fonctions holomorphes dans  $D$ , réelles sur  $I$ . Montrer qu'on a alors

$$\overline{g(\bar{z})} = g(z), \quad h(\bar{z}) = \overline{h(z)} \quad \text{et} \quad \overline{f(\bar{z})} = g(z) - ih(z), \quad \text{pour tout } z \in D.$$

11. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes dans un ouvert connexe  $D$  dans le plan, partout non nulles dans  $D$ ; s'il existe une suite  $(a_n)$  de points de  $D$ , telle que

$$\lim a_n = a, \quad a \in D, \quad a_n \neq a \quad \text{pour tout } n,$$

et que l'on ait

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \quad \text{pour tout } n,$$

montrer qu'il existe alors une constante  $c$  telle que  $f(z) = cg(z)$  dans  $D$ .

12. Soit  $\varphi(z)$  une fonction continue sur le bord orienté  $\Gamma$  d'un compact  $K$ . Soit  $D$  l'ouvert complémentaire de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}$ , et posons, pour  $z \in D$ .

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(i) Si on pose  $\rho = \inf_{\zeta \in \Gamma} \zeta - a$ , pour  $a \in D$ , montrer que  $\frac{1}{\zeta - z}$ , pour  $\zeta \in \Gamma$  et  $|z - a| \leq r$ , avec  $0 < r < \rho$ , peut se développer en série entière normalement convergente suivant les puissances de  $(z - a)$ ; en déduire que  $f(z)$  est analytique au voisinage de chaque  $a \in D$ . (Cf. la démonstration du théorème 3, § 2.)

(ii) Montrer que l'on a

$$f^{(n)}(a) = n! \int_r \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $a \in D$ . (Cf. chapitre III, § 1).

13. Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $|z| < \rho$ ; montrer que, si  $0 < r < \rho$ , on a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ 0 < |h| < \rho - r}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

uniformément pour  $|z| \leq r$ . (Écrire en utilisant (12),

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = \frac{h}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t) dt}{(t-z-h)(t-z)^2},$$

où  $r' = (\rho + r)/2$ ,  $|h| < (r' - r)/2 = (\rho - r)/4$  (par exemple), et en déduire que, si  $M = \sup_{|t|=r'} |f(t)|$ , on a

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| \leq 4M \frac{\rho + r}{(\rho - r)^3} |h|$$

14. Si deux courbes fermées de  $\mathbf{C} - \{0\}$  ont même indice par rapport à 0, elles sont homotopes dans  $\mathbf{C} - \{0\}$ .

# Développements de Taylor et de Laurent.

## Points singuliers et résidus

### 1. Inégalités de Cauchy; théorème de Liouville

#### 1. EXPRESSION INTÉGRALE DES COEFFICIENTS DE TAYLOR

On a vu (chapitre II, § 2, n° 6, théorème 3) que si  $f(z)$  est holomorphe dans un disque ouvert  $D$  centré à l'origine,  $f(z)$  est la somme d'une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  qui converge dans  $D$ .

Les coefficients  $a_n$  de cette série entière sont donnés par la relation :

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Autrement dit, les  $a_n$  sont les coefficients du développement de Taylor de  $f(z)$  à l'origine. Cette série entière porte le nom de série de Taylor de  $f(z)$ . On se propose maintenant d'exprimer les coefficients  $a_n$  par des intégrales portant sur la fonction  $f$ .

Posons  $z = re^{i\theta}$ , pour  $0 \leq r < \rho$ ,  $\rho$  désignant le rayon du disque  $D$ . On a

$$(1. 1) \quad f(re^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{in\theta}$$

Si on fixe  $r$ ,  $\theta$  étant variable,  $f(re^{i\theta})$  est une fonction périodique de  $\theta$ , et la relation précédente donne le développement de Fourier de cette fonction. On observera que dans ce développement ne figurent que les  $e^{in\theta}$  relatifs à des entiers  $n \geq 0$ . Or on sait que les coefficients du développement de Fourier d'une fonction continue de période  $2\pi$  s'expriment par des intégrales portant sur la fonction. Dans le cas présent la série (1. 1) converge

normalement quand  $\theta$  varie,  $r$  étant fixé; on peut donc l'intégrer terme à terme et l'on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_p r^p e^{(p-n)\theta} d\theta;$$

dans le second membre, toutes les intégrales sont nulles sauf celle qui correspond à  $p = n$ , et l'on obtient la formule fondamentale

$$(1.2) \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta,$$

que l'on aurait aussi pu déduire de la relation (6.1) du chapitre II, § 2.

Cette expression intégrale fournit une majoration du coefficient  $a_n$ : soit  $M(r)$  la borne supérieure de  $|f(re^{i\theta})|$  lorsque  $\theta$  varie, c'est-à-dire la borne supérieure des valeurs de  $f$  sur la circonférence de rayon  $r$ . La valeur absolue du second membre de (1.2) est majorée par  $M(r)$ , et la relation (1.2) donne donc l'inégalité fondamentale

$$(1.3) \quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n \text{ entier} \geq 0.$$

Ces inégalités sont connues sous le nom d'*inégalités de Cauchy*.

## 2. THÉORÈME DE LIOUVILLE

**THÉORÈME.** Une fonction  $f(z)$  holomorphe dans tout le plan et bornée est constante.

*Démonstration.* On applique l'inégalité (1.3) à n'importe quel entier  $n \geq 1$ . La quantité  $M(r)$  est, par hypothèse, majorée par un nombre  $M$  indépendant de  $r$ . On a donc

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

si grand que soit  $r$ . Comme le second membre de cette inégalité tend vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini ( $n$  étant  $\geq 1$ ), on voit que  $a_n = 0$  pour  $n \geq 1$ ; ainsi  $f(z) = a_0$  est constante.

*Application: théorème de d'Alembert.* On va montrer que tout polynôme à coefficients complexes et non constant possède au moins une racine complexe. Soit  $P(z)$  un tel polynôme; raisonnons par l'absurde, en supposant que  $P(z) \neq 0$  pour tout  $z$  complexe. Alors la fonction  $\frac{1}{P(z)}$  est holomorphe dans tout le plan. Elle est bornée; en effet

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = z^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right), \quad a_n \neq 0,$$

tend vers l'infini quand  $|z|$  tend vers l'infini, donc il existe un disque compact en dehors duquel  $\left| \frac{1}{P(z)} \right|$  est borné; d'autre part  $\left| \frac{1}{P(z)} \right|$  est borné sur ce disque compact puisque c'est une fonction continue. Ainsi,  $\frac{1}{P(z)}$  est bornée dans tout le plan, donc constante d'après le théorème de Liouville. Il s'ensuit que  $P(z)$  est une constante, contrairement à l'hypothèse.

## 2. Propriété de moyenne; principe du maximum

### 1. PROPRIÉTÉ DE MOYENNE

Appliquons la relation (1. 2) du § 1 dans le cas particulier où  $n = 0$ . On obtient

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta,$$

ou encore

$$(1. 2) \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta.$$

Cette relation exprime que la valeur de  $f$  au point 0 est égale à la valeur moyenne de  $f$  sur le cercle de centre 0 et de rayon  $r$ . Il s'ensuit, plus généralement, que si  $S$  est un disque fermé contenu dans un ouvert  $D$  où  $f$  est holomorphe, la valeur de  $f$  au centre du disque  $S$  est égale à la moyenne des valeurs de  $f$  sur le cercle-frontière de  $S$  (cette moyenne étant prise par rapport à l'arc du cercle).

On dira qu'une fonction  $f$ , définie et continue dans un ouvert  $D$ , à valeurs réelles ou complexes, possède la *propriété de moyenne* si, pour tout disque compact  $S$  contenu dans  $D$ , la valeur de  $f$  au centre de  $S$  est égale à la valeur moyenne de  $f$  sur le cercle-frontière de  $S$ . Nous verrons plus tard que les fonctions qui possèdent la propriété de moyenne ne sont autres que les fonctions *harmoniques*. Dès maintenant, nous pouvons dire que *toute fonction holomorphe possède la propriété de moyenne*. Il est clair que si une fonction à valeurs complexes possède la propriété de moyenne, il en est de même de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. Donc la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe possèdent la propriété de moyenne.

### 2. PRINCIPE DU MAXIMUM

Ce principe va s'appliquer à toute fonction (à valeurs réelles ou complexes) qui possède la propriété de moyenne (c'est-à-dire, comme on le verra plus tard, aux fonctions harmoniques).



**THÉORÈME 1** (principe du maximum). *Soit  $f$  une fonction continue (à valeurs complexes) dans un ouvert  $D$  du plan  $\mathbb{C}$ . Si  $f$  possède la propriété de moyenne, et si  $|f|$  possède un maximum relatif en un point  $a \in D$  (i. e. si  $|f(z)| \leq |f(a)|$  pour tout  $z$  assez voisin de  $a$ ), alors  $f$  est constante dans un voisinage de  $a$ .*

*Démonstration.* Si  $f(a) = 0$ , le théorème est évident. Supposons donc  $f(a) \neq 0$ ; en multipliant au besoin  $f$  par une constante complexe convenable, on se ramène au cas où  $f(a)$  est réel  $> 0$ , ce qu'on supposera désormais.

Soit, pour  $r \geq 0$  assez petit,

$$M(r) = \sup |f(a + re^{i\theta})|.$$

Pour  $r \geq 0$  assez petit, on a  $M(r) \leq f(a)$  par hypothèse. De plus, d'après la propriété de moyenne, on a

$$(2. 1) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

d'où  $f(a) \leq M(r)$ , et par suite  $f(a) = M(r)$ . Il s'ensuit que la fonction

$$g(z) = \operatorname{Re}(f(a) - f(z))$$

est  $\geq 0$  pour  $|z - a| = r$  assez petit, et que  $g(z) = 0$  si et seulement si  $f(z) = f(a)$ . D'après (2. 1), la valeur moyenne de  $g(z)$  sur le cercle

$$|z - a| = r$$

est nulle; comme  $g$  est continue  $\geq 0$ , ceci exige que  $g$  soit identiquement nulle sur ce cercle, et par suite on a  $f(z) = f(a)$  lorsque  $|z - a| = r$  assez petit. C.Q.F.D.

**COROLLAIRE.** *Soit  $D$  un ouvert borné et connexe du plan  $\mathbb{C}$ . Soit  $f$  une fonction (à valeurs complexes) définie et continue dans l'adhérence  $\bar{D}$  et possédant dans  $D$  la propriété de moyenne; soit  $M$  la borne supérieure de  $|f(z)|$  quand  $z$  parcourt la frontière de  $D$ . Alors :*

- (i)  $|f(z)| \leq M$  pour  $z \in D$ ;
- (ii) si  $|f(a)| = M$  en un point  $a \in D$ ,  $f$  est constante.

*Démonstration.* Soit  $M'$  la borne supérieure de  $|f(z)|$  pour  $z \in \bar{D}$ , borne qui est atteinte en un point au moins  $a$  du compact  $\bar{D}$  (puisque  $|f(z)|$  est continue). Si  $a \in D$ ,  $f$  est constante au voisinage de  $a$ , d'après le théorème 1; le théorème 1 montre même que l'ensemble des points de  $D$  où  $f$  prend la valeur  $f(a)$  est ouvert, et comme il est évidemment fermé et non vide, cet ensemble est  $D$  tout entier (puisque  $D$  est connexe); puisque  $f$  est

continue dans  $\bar{D}$ , on a aussi  $f(z) = f(a)$  pour  $z \in \bar{D}$ , ce qui prouve que  $M' = M$  et démontre les assertions (i) et (ii). Il reste à examiner le cas où  $|f(a)| \neq M'$  en tout point  $a \in D$ ; mais alors  $M = M'$  (ce qui prouve (i)), et (ii) est trivialement vrai puisqu'on n'a  $|f(a)| = M$  en aucun point  $a$  de  $D$ .

*Remarque.* Le principe du maximum s'applique notamment dans le cas suivant : si une fonction  $f$  est continue dans un disque fermé et holomorphe à l'intérieur du disque, la borne supérieure de  $|f|$  sur le bord du disque majore  $|f|$  à l'intérieur du disque. En particulier, dans les inégalités de Cauchy (1. 3),  $M(r)$  est non seulement la borne supérieure de  $|f(z)|$  pour  $|z| = r$ , mais aussi pour  $|z| \leq r$ .

### 3. Lemme de Schwarz

**THÉORÈME** (lemme de Schwarz). Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le disque  $|z| < 1$ . Supposons

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

Alors : 1° on a  $|f(z)| \leq |z|$  pour  $|z| < 1$ ;

2° si, pour un  $z_0 \neq 0$ , on a l'égalité  $|f(z_0)| = |z_0|$ , alors on a identiquement

$$f(z) = \lambda z, \quad |\lambda| = 1.$$

*Démonstration.* Dans le développement de Taylor  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , le coefficient  $a_0$  est nul, puisque  $f(0) = 0$ . Il s'ensuit que  $f(z)/z$  est holomorphe pour  $|z| < 1$ . Puisque  $|f(z)| < 1$  par hypothèse on a

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r} \quad \text{pour} \quad |z| = r.$$

Cette inégalité vaut aussi pour  $|z| \leq r$  en vertu du principe du maximum.

Si on fixe  $z$  dans le disque  $|z| < 1$ , on a  $|f(z)| < \frac{|z|}{r}$  quel que soit  $r \geq |z|$  et  $< 1$ . A la limite on a donc  $|f(z)| \leq |z|$ , ce qui établit l'assertion 1° de l'énoncé. Si on a  $|f(z_0)| = |z_0|$  pour un  $z_0 \neq 0$ , la fonction holomorphe  $f(z)/z$  atteint la borne supérieure de son module en un point intérieur au disque  $|z| < 1$ ; donc, d'après le principe du maximum, cette fonction est constante et l'on a donc identiquement  $f(z)/z = \lambda$ ,  $|\lambda| = 1$ . Ceci achève la démonstration.

## 4. Développement de Laurent

## 1. SÉRIES DE LAURENT

On considère ici des séries entières formelles  $\sum_n a_n X^n$ , où la sommation (formelle) porte sur tous les entiers  $n$  positifs, négatifs ou 0. A une telle série associons les deux séries formelles (au sens ordinaire)  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  et  $\sum_{n < 0} a_n X^{-n}$ . Soient  $\rho_1$  et  $1/\rho_2$  les rayons de convergence de ces deux séries. Considérons les séries convergentes

$$(1.1) \quad f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{pour} \quad |z| < \rho_1$$

$$(1.2) \quad f_2(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n \quad \text{pour} \quad |z| > \rho_2.$$

Montrons que  $f_2(z)$  est une fonction holomorphe de  $z$ . Posons  $z = 1/u$ ; la fonction

$$g(u) = \sum_{n > 0} a_{-n} u^n$$

est holomorphe pour  $|u| < 1/\rho_2$ , et sa dérivée est donnée par la formule

$$g'(u) = \sum_{n > 0} n a_{-n} u^{n-1}.$$

Le théorème de dérivation d'une fonction composée montre que  $f_2(z)$  admet une dérivée égale à

$$f_2'(z) = -\frac{1}{z^2} g'(1/z) = \sum_{n < 0} n a_n z^{n-1}.$$

Ainsi la série (1.2) est dérivable terme à terme pour  $|z| > \rho_2$ . Supposons désormais que  $\rho_2 < \rho_1$ . Alors la somme  $f(z)$  de la série

$$(1.3) \quad \sum_{-\infty < n < +\infty} a_n z^n$$

est holomorphe dans la couronne circulaire  $\rho_2 < |z| < \rho_1$ , et sa dérivée  $f'(z)$  est la somme de la série  $\sum n a_n z^{n-1}$  obtenue en dérivant terme à terme.

La série  $\sum a_n z^n$  prend le nom de *série de Laurent* dans la couronne  $\rho_2 < |z| < \rho_1$ .

Dans tout ce qui précède on n'exclut pas le cas où  $\rho_2 = 0$ , ni le cas où  $\rho_1 = +\infty$ . La convergence de la série (1.3) est normale dans toute couronne  $r_2 \leq |z| \leq r_1$  quels que soient  $r_1$  et  $r_2$  tels que

$$\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1.$$

## 2. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LAURENT D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UNE COURONNE

*Définition.* On dit qu'une fonction  $f(z)$ , définie dans une couronne

$$\rho_2 < |z| < \rho_1,$$

est *développable en série de Laurent* dans cette couronne, s'il existe une série de Laurent  $\sum a_n z^n$  qui converge dans cette couronne et dont la somme soit égale à  $f(z)$  en tout point de la couronne.

D'après le n<sup>o</sup> 1,  $f(z)$  est alors holomorphe dans la couronne et la convergence est normale dans toute couronne fermée  $r_2 \leq |z| \leq r_1$  telle que

$$\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1;$$

de plus on va montrer que la série de Laurent, si elle existe, est unique. En effet, posons  $z = re^{i\theta}$  ( $\rho_2 < r < \rho_1$ ); en intégrant terme à terme, par rapport à  $\theta$ , le développement normalement convergent

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty < n < +\infty} a_n r^n e^{in\theta};$$

on obtient, exactement comme au § 1 (n<sup>o</sup> 1), la formule intégrale

$$(2. 1) \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta, \quad n \text{ entier } \geq 0 \text{ ou } < 0.$$

On voit que la fonction  $f$  étant donnée, les coefficients  $a_n$  du développement de Laurent de  $f$ , si un tel développement existe, sont déterminés de manière unique par la relation (2. 1). On l'appelle le développement de Laurent de  $f$

**THÉORÈME.** *Toute fonction  $f(z)$  holomorphe dans une couronne  $\rho_2 < |z| < \rho_1$  est développable en série de Laurent dans cette couronne.*

*Démonstration.* Donnons-nous deux nombres  $r_1$  et  $r_2$  tels que

$$\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1.$$

On va montrer qu'il existe une série de Laurent qui converge normalement dans la couronne  $r_2 \leq |z| \leq r_1$  et dont la somme est égale à  $f(z)$  dans cette couronne. En vertu de l'unicité du développement de Laurent, qui résulte de la formule intégrale (2. 1), la série de Laurent ainsi obtenue ne dépendra pas du choix de  $r_1$  et  $r_2$ . Donc cette série de Laurent convergera vers  $f(z)$  dans toute la couronne  $\rho_2 < |z| < \rho_1$ , ce qui démontrera le théorème.

Les nombres  $r_1$  et  $r_2$  étant choisis, soient  $r'_1$  et  $r'_2$  deux nombres tels que  $\rho_2 < r'_2 < r_2 < r_1 < r'_1 < \rho_1$ . Considérons la couronne compacte

$$r'_2 \leq |z| \leq r'_1,$$

dont le bord orienté est la différence du cercle  $\gamma_1$  de centre  $o$  et de rayon  $r'_1$  parcouru dans le sens direct, et du cercle  $\gamma_2$  de centre  $o$  et de rayon  $r'_2$  parcouru dans le sens direct. D'après la formule intégrale de Cauchy (Chapitre II, § 2, théorème 5), on a, pour  $r_2 \leq |z| \leq r_1$ ,

$$(2.2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t) dt}{t-z}.$$

Considérons la première intégrale; on a  $|t| = r'_1$  et  $|z| \leq r_1 < r'_1$ ; on peut donc écrire le développement en série

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{t^{n+1}}$$

qui converge normalement quand  $t$  décrit le cercle de centre  $o$  et de rayon  $r'_1$ .

Remplaçons dans la première intégrale  $\frac{1}{t-z}$  par cette série; en vertu de la convergence normale on peut intégrer terme à terme, d'où

$$(2.3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t) dt}{t-z} = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

en posant

$$(2.4) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t) dt}{t^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Considérons maintenant la deuxième intégrale; on a

$$|t| = r'_2 \quad \text{et} \quad |z| \geq r_2 > r'_2;$$

d'où

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-t/z} = -\sum_{n < 0} \frac{z^n}{t^{n+1}}.$$

Dans la deuxième intégrale on remplace  $\frac{1}{t-z}$  par cette série; et puisque cette série converge normalement, on peut intégrer terme à terme, d'où

$$(2.5) \quad -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t) dt}{t-z} = \sum_{n < 0} a_n z^n,$$

en posant

$$(2.6) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t) dt}{t^{n+1}}, \quad n < 0.$$

Finalement la relation (2.2) montre que l'on a

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < +\infty} a_n z^n \quad \text{pour} \quad r_2 \leq |z| \leq r_1,$$

la convergence étant normale. Le théorème est ainsi démontré.

3. DÉCOMPOSITION D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UNE COURONNE

PROPOSITION 3. 1. *Étant donnée une fonction  $f(z)$  holomorphe dans une couronne  $\rho_2 < |z| < \rho_1$ , il existe une fonction  $f_1(z)$  holomorphe dans le disque  $|z| < \rho_1$  et une fonction  $f_2(z)$  holomorphe pour  $|z| > \rho_2$ , telles que l'on ait*

$$(4. 1) \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

*Cette décomposition est unique si on astreint la fonction  $f_2$  à tendre vers 0 quand  $|z|$  tend vers  $\infty$ .*

En effet, soit  $f(z) = \sum_{-\infty < n < +\infty} a_n z^n$  le développement de Laurent de  $f$ . Posons

$$(4. 2) \quad f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad f_2(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n.$$

La relation (4. 1) est évidemment satisfaite, et  $|f_2(z)|$  tend vers 0 quand  $|z|$  tend vers  $\infty$ . Supposons que l'on ait une autre décomposition

$$f(z) = g_1(z) + g_2(z),$$

et montrons que  $f_1 = g_1$ ,  $f_2 = g_2$ . Soit  $h$  la fonction holomorphe égale à  $f_1 - g_1$  pour  $|z| < \rho_1$  et égale à  $g_2 - f_2$  pour  $|z| > \rho_2$ ; cette fonction  $h$  est holomorphe dans tout le plan, et tend vers 0 quand  $|z|$  tend vers  $\infty$ . En vertu du principe du maximum (§ 2, n<sup>o</sup> 2), la fonction  $h$  est identiquement nulle. C.Q.F.D.

4. INÉGALITÉS DE CAUCHY; APPLICATION A L'ÉTUDE D'UN POINT SINGULIER ISOLÉ

Considérons la formule intégrale (2. 1). Si  $M(r)$  désigne la borne supérieure de  $|f(z)|$  pour  $|z| = r$ , le second membre de (2. 1) a son module majoré par  $M(r)$ , d'où l'inégalité de Cauchy

$$(4. 1) \quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n \text{ entier } \geq 0 \text{ ou } < 0.$$

Considérons une fonction  $f(z)$  holomorphe dans le disque pointé  $0 < |z| < \rho$ . Demandons-nous si cette fonction peut se prolonger en une fonction holomorphe dans tout le disque  $|z| < \rho$ , centre inclus. Ce prolongement, s'il existe, est évidemment unique (en vertu du principe du prolongement analytique, ou, plus simplement ici, pour une raison de continuité).

PROPOSITION 4. 1. *Pour que le prolongement soit possible, il faut et il suffit que la fonction  $f(z)$  soit bornée au voisinage de 0.*

Cette condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffi-

sante. Dans le disque pointé  $0 < |z| < \rho$ , la fonction  $f$  est développable en série de Laurent  $\sum_{-\infty < n < +\infty} a_n z^n$ . Par hypothèse il existe un nombre  $M > 0$  qui majore  $|f(z)|$  pour  $|z| = r$  assez petit, quel que soit  $r$ . D'après l'inégalité de Cauchy (4. 1), on a

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

si petit que soit  $r$ , et pour  $n < 0$  ceci entraîne  $a_n = 0$ . Donc le développement de Laurent de  $f$  se réduit à une série de Taylor, et celle-ci définit le prolongement cherché de  $f(z)$ .

*Définition.* Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le disque pointé  $0 < |z| < \rho$ . On dit que l'origine 0 est un *point singulier isolé* de  $f$  si la fonction  $f$  ne peut pas se prolonger en une fonction holomorphe dans le disque tout entier  $|z| < \rho$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit un point singulier isolé est que les coefficients  $a_n$  du développement de Laurent ne soient pas tous nuls pour  $n < 0$ . On voit que deux cas sont possibles :

1<sup>er</sup> cas : il n'existe qu'un nombre fini d'entiers  $n < 0$  pour lesquels  $a_n \neq 0$ . Dans ce cas il existe un entier positif  $n$  tel que  $z^n f(z)$  soit une fonction  $g(z)$  holomorphe au voisinage de l'origine. Donc  $f(z) = \frac{g(z)}{z^n}$  est *méromorphe* au voisinage de l'origine.

2<sup>e</sup> cas : il existe une infinité d'entiers  $n < 0$  tels que  $a_n \neq 0$ . Dans ce cas la fonction  $f(z)$  n'est pas méromorphe au voisinage de l'origine.

*Définition.* Dans le premier cas on dit que le point 0 est un *pôle* de la fonction  $f$ ; dans le second cas on dit que 0 est un *point singulier essentiel* de la fonction  $f$ .

**THÉORÈME (Weierstrass).** Si 0 est un *point singulier essentiel isolé* d'une fonction  $f(z)$  holomorphe dans un disque pointé  $0 < |z| < \rho$ , alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'image du disque pointé  $0 < |z| < \varepsilon$  par  $f$  est dense dans le plan  $\mathbb{C}$ .

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un disque de centre  $a$  et de rayon  $r > 0$  qui soit *extérieur* à l'image du disque pointé  $0 < |z| < \varepsilon$  par  $f$ . On aurait donc

$$(4. 2) \quad |f(z) - a| \geq r \quad \text{pour} \quad 0 < |z| < \varepsilon.$$

La fonction  $g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$  serait holomorphe et bornée dans le disque pointé  $0 < |z| < \varepsilon$ . D'après la proposition 4. 1, cette fonction se prolonge

gerait en une fonction holomorphe dans le disque  $|z| < \varepsilon$ , fonction notée encore  $g(z)$ . Alors  $\frac{1}{g(z)}$  serait méromorphe dans le disque  $|z| < \varepsilon$ , et  $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$  serait aussi méromorphe, ce qui contredit l'hypothèse suivant laquelle  $0$  est un point singulier essentiel de  $f(z)$ .

*Remarque.* Le cas d'un point singulier essentiel  $z_0$  se ramène évidemment au cas où  $z_0 = 0$ , en remplaçant  $z$  par  $z - z_0$ .

Signalons sans démonstration le théorème suivant, beaucoup plus précis que le théorème de Weierstrass :

**THÉORÈME DE PICARD.** *Si  $0$  est un point singulier essentiel isolé de la fonction holomorphe  $f(z)$ , alors l'image par  $f$  de toute couronne  $0 < |z| < \varepsilon$  est le plan  $\mathbb{C}$  tout entier ou le plan  $\mathbb{C}$  privé d'un seul point.*

*Exemple.* La fonction  $e^{1/z} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$  est holomorphe dans le plan pointé  $z \neq 0$ , et elle admet l'origine comme point singulier essentiel puisque le coefficient de  $\frac{1}{z^n}$  est  $\neq 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Cette fonction ne prend jamais la valeur  $0$ ; à titre d'exercice on montrera qu'elle prend toute valeur  $\neq 0$  dans tout disque pointé  $0 < |z| < \varepsilon$ .

## 5. Introduction du point à l'infini. Théorème des résidus

### 1. SPHÈRE DE RIEMANN

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , notons  $x, y, u$  les coordonnées d'un point et considérons la sphère-unité  $\mathbb{S}_2$  :

$$x^2 + y^2 + u^2 = 1.$$

Munie de la topologie induite par celle de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , la sphère  $\mathbb{S}_2$  est un espace compact, puisque  $\mathbb{S}_2$  est un sous-ensemble borné et fermé de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $P$  et  $P'$  les deux points de  $\mathbb{S}_2$  dont les coordonnées sont respectivement  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$ . Considérons la projection stéréographique de pôle  $P$ . Elle associe à tout point  $M$  de  $\mathbb{S}_2$  distinct de  $P$  le point du plan  $u = 0$  aligné avec  $P$  et  $M$ . Son affixe complexe  $z$  est donnée par la formule

$$(1.1) \quad z = \frac{x + iy}{1 - u},$$

où  $x, y, u$  sont les coordonnées du point  $M$ .



Considérons de même la projection stéréographique de pôle  $P'$ , et prenons le point du plan  $u = 0$  imaginaire conjugué du point transformé de  $M(x, y, u)$  par cette projection stéréographique. Son affixe complexe  $z'$  est donnée par la formule

$$(1.2) \quad z' = \frac{x - iy}{1 + u}.$$

On observera que, pour tout point  $M(x, y, u)$  distinct de  $P$  et  $P'$ , on a, entre les nombres complexes  $z$  et  $z'$  correspondants, la relation

$$(1.3) \quad zz' = 1.$$

L'application  $(x, y, u) \rightarrow z$  est un homéomorphisme de  $S_2 - P$  sur  $\mathbb{C}$ ; on dit que l'on a une *carte* de  $S_2 - P$  sur le plan complexe  $\mathbb{C}$ . De même l'application  $(x, y, u) \rightarrow z'$  est une carte de  $S_2 - P'$  sur le plan complexe  $\mathbb{C}$ . Munie de ces deux cartes,  $S_2$  s'appelle la sphère de Riemann.

Soit  $D$  un ensemble ouvert de  $S_2$ . On dit qu'une fonction  $f$  définie dans  $D$  est *holomorphe* dans  $D$  si, au voisinage de tout point  $M \in D$  distinct de  $P$ , elle s'exprime comme fonction holomorphe de  $z$ , et si au voisinage de tout point  $M \in D$  distinct de  $P'$ , elle s'exprime comme fonction holomorphe de  $z'$ . Observons qu'au voisinage d'un point distinct de  $P$  et de  $P'$ , toute fonction holomorphe de  $z$  est une fonction holomorphe de  $z'$  et réciproquement, grâce à la relation (1.3). Grâce à la relation (1.1), nous identifierons toujours le plan complexe  $\mathbb{C}$  à la sphère  $S_2$  privée du point  $P$ . On voit que  $S_2$  est obtenue en adjoignant à  $\mathbb{C}$  un « point à l'infini ». Pour étudier une fonction au voisinage du point à l'infini  $P$ , on utilisera la variable complexe  $z' = 1/z$ , qui s'annule au point  $P$ . Dans  $\mathbb{C}$ , les ouverts  $|z| > r$  forment un système fondamental de voisinages du point à l'infini. Une fonction  $f(z)$  définie dans un tel ouvert est « holomorphe à l'infini » si, par le changement de variable  $z = 1/z'$ , elle s'exprime comme fonction holomorphe de  $z'$  pour  $|z'| < 1/r$ .

De même, une fonction  $f(z)$  sera *méromorphe à l'infini* si elle s'exprime comme fonction de  $z'$  méromorphe au voisinage de  $z' = 0$ . Enfin, une fonction  $f(z)$  holomorphe pour  $|z| > r$  admet le point à l'infini comme point singulier essentiel isolé si la fonction  $f(1/z')$  admet l'origine  $z' = 0$  comme point singulier essentiel isolé. Si

$$f(z) = \sum_n a_n z^n$$

est le développement de Laurent de  $f(z)$  pour  $|z| > r$ , une condition nécessaire et suffisante pour que le point à l'infini soit un pôle de  $f$  est que  $a_n = 0$  pour tous les entiers  $n \geq 0$  sauf un nombre fini d'entre eux; la condition pour que le point à l'infini soit un point singulier essentiel est qu'il existe une infinité d'entiers  $n \geq 0$  tels que  $a_n \neq 0$ .

Sur la sphère  $S_2$  on a la notion de *chemin différentiable*, de *chemin fermé*, de *bord orienté d'un compact*.

2. THÉORÈME DES RÉSIDUS

Considérons d'abord une fonction  $f(z)$  holomorphe dans une couronne  $\rho_2 < |z| < \rho_1$  centrée à l'origine.

PROPOSITION 2. 1. Si  $\gamma$  est un chemin fermé contenu dans une telle couronne, on a

$$(2. 1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = I(\gamma, 0) a_{-1},$$

où  $I(\gamma, 0)$  désigne l'indice du chemin  $\gamma$  par rapport à l'origine  $0$ , et  $a_{-1}$  est le coefficient de  $1/z$  dans le développement de Laurent de  $f$ .

*Démonstration.* On a

$$f(z) = a_{-1}/z + g(z),$$

où

$$g(z) = \sum_{n \neq -1} a_n z^n$$

est holomorphe dans la couronne et  $y$  admet une primitive égale à

$$\sum_{n \neq -1} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \quad (\text{cf. } \S 4, n^o 1).$$

On a donc la relation

$$(2. 2) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = a_{-1} \int_{\gamma} dz/z + \int_{\gamma} g(z) dz.$$

Or  $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$  puisque  $g$  admet une primitive,

$$\int_{\gamma} dz/z = 2\pi i I(\gamma, 0) \quad \text{d'après la définition de l'indice.}$$

Ces deux relations, jointes à (2. 2), donnent (2. 1).

La formule (2. 1) s'applique notamment lorsque la fonction  $f$  admet l'origine  $0$  comme point singulier isolé (pôle ou point singulier essentiel). Dans ce cas,  $\gamma$  désigne un chemin fermé dans un voisinage de  $0$ , ne passant pas par  $0$ . Le coefficient  $a_{-1}$  du développement de Laurent de  $f$  s'appelle alors le *résidu* de la fonction  $f$  au point singulier  $0$ . En particulier, si  $\gamma$  est un cercle de centre  $0$  et de petit rayon parcouru dans le sens direct, on a

$$(2. 3) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

On définit de même le résidu en un point singulier isolé situé en n'importe quel point du plan complexe  $G$ .

La définition du *résidu au point à l'infini* nécessite une convention spéciale : soit  $f(z)$  une fonction holomorphe pour  $|z| > r$ . Posons  $z = 1/z'$ ; on a

$$f(z) dz = -\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) dz'.$$

Par définition, le résidu de  $f$  au point à l'infini est égal au résidu de la fonction  $-\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right)$  au point  $z' = 0$ . Donc si  $\sum a_n z^n$  est le développement de Laurent de  $f(z)$  au voisinage du point à l'infini, le résidu de  $f$  à l'infini est  $-a_{-1}$ .

**THÉORÈME DES RÉSIDUS.** Soit  $D$  un ouvert de la sphère de Riemann  $S_2$ , et soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $D$  sauf peut-être en des points isolés qui sont singuliers pour  $f$ . Soit  $\Gamma$  le bord orienté d'un compact  $\Lambda$  contenu dans  $D$ , et supposons que  $\Gamma$  ne contienne aucun point singulier de  $f$ , ni le point à l'infini. Les points singuliers  $z_k$  contenus dans  $\Lambda$  sont alors en nombre fini, et on a la relation :

$$(2.4) \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left( \sum_k \text{Res}(f, z_k) \right),$$

où  $\text{Res}(f, z_k)$  désigne le résidu de la fonction  $f$  au point  $z_k$ ; la sommation est étendue à tous les points singuliers  $z_k \in \Lambda$ , y compris éventuellement le point à l'infini.

*Démonstration.* Distinguons deux cas, suivant que le point à l'infini appartient ou non à  $\Lambda$ .

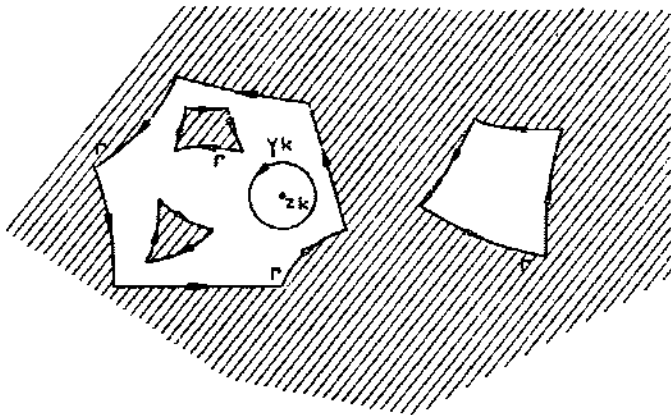


Figure 4

N. B. La partie hachurée représente le complémentaire du compact  $\Lambda$ .

*1<sup>er</sup> cas :* le point à l'infini n'appartient pas à  $\Lambda$ ;  $\Lambda$  est donc un compact (borné) du plan  $\mathbb{C}$  (Cf. fig. 4); chaque point singulier  $z_k$  est le centre d'un disque fermé  $\delta_k$  intérieur à  $\Lambda$ , et l'on peut choisir les rayons de ces disques

assez petits pour que ces disques soient deux à deux disjoints. Soit  $\gamma_k$  le bord du disque  $\delta_k$  parcouru dans le sens direct.

Soit  $A'$  le compact obtenu en enlevant de  $A$  les intérieurs des disques précédents; le bord orienté de  $A'$  est la différence de  $\Gamma$  (bord orienté de  $A$ ) et des cercles  $\gamma_k$ . Puisque  $f$  est holomorphe au voisinage de  $A'$ , on a (Cf. chapitre II, § 2, n° 8, théorème 5)

$$(2.5) \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

D'autre part, d'après (2.3),

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k),$$

et en portant cela dans (2.5), on obtient la relation (2.4) à démontrer.

2° cas : le point à l'infini appartient à  $A$ . Soit  $|z| \geq r$  un voisinage du point à l'infini qui ne rencontre pas  $\Gamma$  et tel que  $f(z)$  soit holomorphe dans ce voisinage (point à l'infini éventuellement exclu). Soit  $A''$  le compact obtenu en enlevant de  $A$  l'ensemble ouvert  $|z| > r$  (cf. fig. 5). Le bord orienté de  $A''$

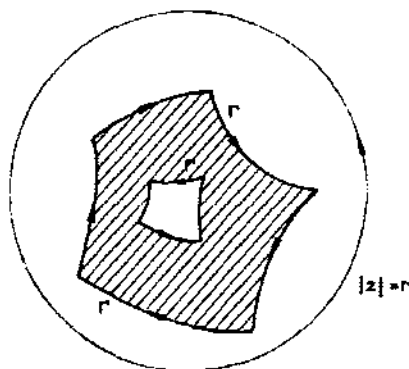


Figure 5

N. B. La partie hachurée représente la complémentaire de  $A$ .

est la somme du bord orienté  $\Gamma$  de  $A$  et du cercle  $|z| = r$  parcouru dans le sens direct. En appliquant à  $A''$  ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, on obtient

$$(2.6) \quad \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{|z|=r} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k),$$

la somme du second membre étant étendue à tous les points singuliers  $z_k$

contenus dans A et autres que le point à l'infini. D'autre part, d'après la définition du résidu à l'infini, on a

$$\int_{|z|=r} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty),$$

et en portant ceci dans (2. 6) on obtient :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f, \infty) + \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k) \right)$$

ce qui n'est pas autre chose que la relation (2. 4) à démontrer lorsque le point à l'infini est l'un des points  $z_k$ .

*Remarque.* Considérons en particulier le cas où le compact est la sphère  $S_2$  tout entière. Dans ce cas le bord est vide, et la relation (2. 4) se réduit à :

$$(2. 7) \quad \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k) = 0.$$

Par exemple, la somme des résidus d'une fraction rationnelle (y compris le résidu à l'infini) est nulle.

### 3. CALCUL PRATIQUE DES RÉSIDUS

*Cas d'un pôle simple à distance finie.* Soit  $z_0$  un pôle simple de  $f$ ; on a donc

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} g(z),$$

où  $g$  est holomorphe au voisinage de  $z_0$ , avec  $g(z_0) \neq 0$ . Soit

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

le développement de Taylor de  $g(z)$  au voisinage de  $z_0$ ; on voit que, dans le développement de Laurent  $f(z)$ , le coefficient de  $\frac{1}{z - z_0}$  est égal à  $g(z_0)$ . On a donc

$$(3. 1) \quad \operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} (z - z_0) f(z).$$

Si  $f$  est donnée sous la forme d'un quotient  $P/Q$ ,  $P$  et  $Q$  étant holomorphes au voisinage de  $z_0$ , et  $z_0$  étant un zéro simple de  $Q$  avec  $P(z_0) \neq 0$ , on a

$$(3. 2) \quad \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)},$$

$Q'$  désignant la dérivée de  $Q$ .

*Exemple.* Soit  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ ; la fonction possède deux pôles simples  $z = \pm i$ ; on a  $P/Q' = \frac{1}{2z} e^{iz}$ , et par suite le résidu de  $f$  au pôle  $i$  est égal à  $-\frac{i}{2e}$ .

*Cas d'un pôle multiple.* Soit  $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} g(z)$ , où  $g(z)$  est holomorphe au voisinage du point  $z_0$ , avec  $g(z_0) \neq 0$ . Le résidu de  $f(z)$  est égal au coefficient de  $(z - z_0)^{k-1}$  dans le développement de Taylor de  $g(z)$  au point  $z_0$ . Tout revient donc à calculer un développement limité de  $g(z)$ . Pour cela, il est souvent commode de prendre comme nouvelle variable  $t = z - z_0$ .

*Exemple.* Soit  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2}$ . Soit à calculer le résidu de  $f(z)$  au pôle double  $z = i$ . On a ici

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}.$$

Posons  $z = i + t$ , et cherchons le coefficient de  $t$  dans le développement de Taylor de

$$h(t) = \frac{e^{i(i+t)}}{(i+t)(2i+t)^2}.$$

Il suffit d'écrire le développement limité de degré 1 de chacun des termes

$$\begin{aligned} e^{i(i+t)} &= e^{-1}(1 + it + \dots), \\ (i+t)^{-1} &= -i(1 - it)^{-1} = -i(1 + it + \dots), \\ (2i+t)^{-2} &= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{i}{2}t\right)^{-2} = -\frac{1}{4}(1 + it + \dots). \end{aligned}$$

D'où

$$h(t) = \frac{i}{4e}(1 + 3it + \dots),$$

et le résidu cherché est  $-\frac{3}{4e}$ .

*Application : résidu d'une dérivée logarithmique.* Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe au voisinage de  $z_0$ . On se propose de calculer le résidu de la dérivée logarithmique  $f'/f$  au point  $z_0$ . On a

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

où  $g$  est holomorphe au point  $z_0$ ,  $g(z_0) \neq 0$ ; l'entier  $k$  est  $\geq 0$  si  $f$  est

holomorphe en  $z_0$ ,  $k < 0$  si  $z_0$  est un pôle de  $f$ ; prenant la dérivée logarithmique des deux membres, on obtient

$$f'/f - \frac{k}{z - z_0} + g'/g;$$

donc  $f'/f$  admet  $z_0$  pour pôle simple, et le résidu de ce pôle est égal à l'entier  $k$ , ordre de multiplicité du zéro ou du pôle  $z_0$  (compté positivement s'il s'agit d'un zéro, et négativement s'il s'agit d'un pôle).

#### 4. APPLICATION A LA DÉTERMINATION DU NOMBRE DES PÔLES ET DES ZÉROS D'UNE FONCTION MÉROMORPHE

PROPOSITION 4. 1. Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe non constante dans un ouvert  $D$ , et soit  $\Gamma$  le bord orienté d'un compact  $K$  contenu dans  $D$ . Supposons que la fonction  $f$  n'ait pas de pôle sur  $\Gamma$  et n'y prenne pas la valeur  $a$ . On a alors :

$$(4. 1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = Z - P,$$

où  $Z$  désigne la somme des ordres de multiplicité des racines de l'équation

$$f(z) - a = 0$$

contenues dans  $K$ , et où  $P$  désigne la somme des ordres de multiplicité des pôles de  $f$  contenus dans  $K$ .

C'est une conséquence immédiate du théorème des résidus, et du calcul explicite des résidus de la fonction  $\frac{f'(z)}{f(z) - a}$ .

En particulier, lorsque  $f$  est holomorphe, l'intégrale du premier membre de (4. 1) est égale au nombre des zéros de  $f(z) - a$  contenus dans  $K$ , étant entendu que chaque zéro est compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

On observera que la valeur de l'intégrale du premier membre de (4. 1) est égale au quotient par  $2\pi$  de la variation de l'argument de  $f(z) - a$  lorsque  $z$  décrit le chemin fermé  $\Gamma$  (Cf. chapitre II, § 1, n° 5).

PROPOSITION 4. 2. Soit  $z_0$  une racine d'ordre  $k$  de l'équation  $f(z) = a$ ,  $f$  étant une fonction holomorphe non constante au voisinage de  $z_0$ . Pour tout voisinage  $V$  assez petit de  $z_0$ , et pour tout  $b$  assez voisin de  $a$  et  $\neq a$ , l'équation  $f(z) = b$  possède exactement  $k$  solutions simples dans  $V$ .

En effet, soit  $\gamma$  un cercle de centre  $z_0$  et de rayon assez petit pour que  $z_0$  soit l'unique solution de l'équation  $f(z) = a$  contenue dans le disque fermé de bord  $\gamma$ . Supposons de plus que le rayon de  $\gamma$  soit assez petit pour

que  $f'(z)$  soit  $\neq 0$  en tout point du disque autre que le centre  $z_0$ . Considérons l'intégrale

$$(4. 2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - b}.$$

On sait que (4. 2) reste constant lorsque  $b$  varie dans une composante connexe du complémentaire de l'image de  $\gamma$  par  $f$  (Cf. chapitre II, § 1, n° 8). Donc, pour tout  $b$  assez voisin de  $a$ , on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - b} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = k,$$

et par suite l'équation  $f(z) = b$  possède exactement  $k$  racines à l'intérieur de  $\gamma$ , si l'on compte chaque racine avec son ordre de multiplicité. Mais pour  $b \neq a$  et assez voisin de  $a$ , les racines de l'équation  $f(z) = b$  sont toutes simples, car la dérivée  $f'(z)$  est  $\neq 0$  en tout point  $z$  assez voisin de  $z_0$  et  $\neq z_0$ . La proposition 4. 2 est ainsi démontrée.

#### 5. APPLICATION AUX FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

Soient  $e_1$  et  $e_2$  deux nombres complexes linéairement indépendants sur le corps réel  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire tels que  $e_1 \neq 0$  et que le quotient  $e_2/e_1$  ne soit pas réel. Tous les vecteurs de la forme  $n_1 e_1 + n_2 e_2$ , où  $n_1$  et  $n_2$  sont des entiers arbitraires, forment un sous-groupe discret  $\Omega$  du groupe additif du corps  $\mathbb{C}$ . On dit qu'une fonction  $f(z)$  définie dans le plan admet le groupe  $\Omega$  comme groupe de périodes si l'on a

$$(5. 1) \quad f(z + n_1 e_1 + n_2 e_2) = f(z) \quad \text{pour tout } z,$$

quels que soient les entiers  $n_1$  et  $n_2$ . Pour cela il faut et il suffit que l'on ait

$$(5. 2) \quad f(z + e_1) = f(z), \quad f(z + e_2) = f(z).$$

Soit  $z_0$  un nombre complexe quelconque. Considérons le parallélogramme (fermé) ayant pour sommets  $z_0$ ,  $z_0 + e_1$ ,  $z_0 + e_2$ ,  $z_0 + e_1 + e_2$ . Il se compose de tous les points de la forme  $z_0 + t_1 e_1 + t_2 e_2$ , où  $0 \leq t_1 \leq 1$ ,  $0 \leq t_2 \leq 1$ . Un tel parallélogramme s'appelle un *parallélogramme de périodes* ayant pour premier sommet  $z_0$ . Soit maintenant  $f(z)$  une fonction méromorphe dans tout le plan et admettant le groupe  $\Omega$  comme groupe de périodes. Choisissons  $z_0$  de façon que  $f(z)$  n'ait pas de pôle sur le bord  $\gamma$  du parallélogramme de périodes ayant pour premier sommet  $z_0$ . On peut considérer l'intégrale  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , dont la valeur est nulle à cause de la



périodicité; en effet

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 [f(z_0 + te_1) - f(z_0 + e_2 + te_1)] dt + \int_0^1 [f(z_0 + e_1 + te_2) - f(z_0 + te_2)] dt.$$

Appliquant ce résultat à la dérivée logarithmique  $f'/f$ , et compte tenu de la proposition 4. 1, on obtient :

PROPOSITION 5. 1. *Si  $f(z)$  est une fonction méromorphe dans tout le plan, non constante, et admettant le groupe  $\Omega$  comme groupe de périodes, le nombre des zéros de cette fonction contenus dans un parallélogramme de périodes est égal au nombre des pôles contenus dans le même parallélogramme, si  $f$  n'admet ni zéro ni pôle sur le bord de ce parallélogramme.*

COROLLAIRE. *Une fonction holomorphe dans  $\mathbb{C}$  et admettant  $\Omega$  comme groupe de périodes est constante.*

Sinon, le nombre des zéros de  $f(z) - a$  devrait être égal au nombre des pôles, donc nul; et ceci pour tout  $a$ , ce qui est absurde.

Considérons maintenant la fonction  $zf'(z)/(f(z) - a)$ . Cette fonction n'étant pas périodique, on ne peut plus affirmer que son intégrale sur le bord  $\gamma$  d'un parallélogramme de périodes est nulle. On va montrer que la valeur de l'intégrale

$$(5. 3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z) dz}{f(z) - a}$$

appartient au groupe de périodes  $\Omega$ . En effet, elle est égale à

$$-\frac{e_2}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} + \frac{e_1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a},$$

$\gamma_1$  désignant le côté du parallélogramme d'origine  $z_0$  et d'extrémité  $z_0 + e_1$ , et  $\gamma_2$  désignant le côté du parallélogramme d'origine  $z_0$  et d'extrémité  $z_0 + e_2$ . Or les intégrales  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a}$  et  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a}$  ont pour valeurs des nombres entiers. D'autre part, l'intégrale (5. 3) est égale à la somme des résidus de la fonction  $zf'(z)/(f(z) - a)$ . Calculons ces résidus. Les pôles sont tout au plus les pôles de  $f(z)$  et les zéros de  $f(z) - a$ . Si  $\beta_i$  est un pôle, le résidu pour ce pôle est égal à  $-k\beta_i$ ,  $k$  désignant son ordre de multiplicité. De même le résidu d'un zéro  $\alpha_i$  de  $f(z) - a$  est égal à  $k\alpha_i$ ,  $k$  désignant son ordre de multiplicité.

En résumé, on obtient :

PROPOSITION 5. 2. *Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe dans tout le plan, non constante, et admettant le groupe  $\Omega$  comme groupe de périodes. Pour tout nombre complexe  $a$ , on a*

$$\sum_i \alpha_i \equiv \sum_i \beta_i \quad \text{mod. } \Omega,$$

où les  $\alpha_i$  désignent les racines de l'équation  $f(z) = a$  (chacune d'elles étant comptée autant de fois que l'exige son ordre de multiplicité) et les  $\beta_i$  désignent les pôles (chacun étant compté avec son ordre de multiplicité), contenus dans un parallélogramme de périodes.

En particulier, la somme  $\sum_i x_i$  prise modulo  $\Omega$  est indépendante de  $a$ .

## 6. Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

On se propose de calculer des intégrales définies sans expliciter une primitive de la fonction sous le signe d'intégration, mais en interprétant la valeur de l'intégrale comme somme des résidus relatifs à des points singuliers d'une fonction holomorphe convenablement choisie. Il n'y a pas de méthode générale permettant de traiter ce problème. Nous allons nous borner à considérer quelques types classiques et à indiquer, pour chacun d'eux, quel est le procédé qui permet de transformer le problème en un calcul de résidus.

1<sup>er</sup> type. Considérons une intégrale de la forme

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt,$$

où  $R(x, y)$  désigne une fonction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le cercle  $x^2 + y^2 = 1$ . Posons  $e^{it} = z$ ; lorsque  $t$  croît de 0 à  $2\pi$ ,  $z$  décrit le cercle-unité. Donc  $I$  est égal au produit par  $2\pi i$  de la somme des résidus de la fonction

$$\frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$$

aux pôles contenus dans le disque-unité.

On a donc

$$I = 2\pi \sum \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \right\},$$

la somme étant étendue aux pôles contenus dans le disque-unité.

*Exemple.* Soit  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$ , où  $a$  désigne un nombre réel  $> 1$ . On a

$$I = 2\pi \sum \operatorname{Res} \frac{2i}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

Le seul pôle  $z_0$  contenu dans le disque-unité est  $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$ ; le résidu est  $\frac{i}{z_0 + ia} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$ , d'où  $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$ .

2<sup>e</sup> type. Considérons une intégrale de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx,$$

où  $R$  est une fonction rationnelle n'ayant pas de pôle réel. On doit supposer en outre que l'intégrale est convergente; pour cela il faut et il suffit que la partie principale de  $R(x)$  à l'infini soit de la forme  $\frac{1}{x^n}$ , l'entier  $n$  étant  $\geq 2$ . Une condition équivalente est la suivante

$$(2.1) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} xR(x) = 0.$$

Pour calculer l'intégrale  $I$  on va intégrer la fonction  $R(z)$  de la variable complexe  $z$  sur le bord  $\gamma$  d'un demi-disque de centre  $o$ , de rayon  $r$ , situé dans le demi-plan  $y \geq 0$  (fig. 6). Pour  $r$  assez grand la fonction  $R(z)$  est

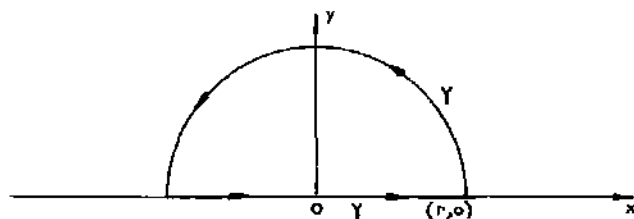


Figure 6

holomorphe sur le bord  $\gamma$  et l'intégrale  $\int_{\gamma} R(z) dz$  est égale à la somme des résidus des pôles de  $R$  contenus à l'intérieur de  $\gamma$ . On a donc

$$(2.2) \quad \int_{-r}^{+r} R(x) dx + \int_{\delta(r)} R(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(R(z)),$$

où  $\delta(r)$  désigne la demi-circonférence de centre  $o$  et de rayon  $r$  parcourue dans le sens direct, et où la sommation est étendue aux résidus des pôles situés dans le demi-plan  $y > 0$ .

Lorsque  $r$  tend vers  $+\infty$ , la première intégrale du premier membre de (2.2) tend vers  $I$ ; on va montrer que la seconde intégrale du premier membre de (2.2) tend vers 0. Il en résultera

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res}(R(z)),$$

la somme étant étendue à tous les pôles de  $R$  situés dans le demi-plan supérieur  $y > 0$ . On verrait de même que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = -2\pi i \sum \text{Res}(R(z)),$$

la somme étant étendue cette fois à tous les pôles du demi-plan inférieur  $y < 0$ .

Il reste à prouver que  $\int_{\delta(r)} R(z) dz$  tend vers 0 quand  $r$  tend vers  $+\infty$ .  
Cela résulte aussitôt du lemme suivant :

LEMME 1. Soit  $f(z)$  une fonction continue définie dans un secteur

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

$r$  et  $\theta$  désignant le module et l'argument de  $z$ . Si

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0 \quad (\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2),$$

alors l'intégrale  $\int f(z) dz$  étendue à l'arc de cercle de centre 0 et de rayon  $r$  contenu dans le secteur, tend vers 0 lorsque  $r$  tend vers  $+\infty$ .

En effet, soit  $M(r)$  la borne supérieure de  $|f(z)|$  sur l'arc de cercle  $|z| = r$ . On a

$$\left| \int f(z) dz \right| \leq M(r) r(\theta_2 - \theta_1),$$

et le lemme en résulte aussitôt.

On démontrerait de la même manière le lemme suivant :

LEMME 2. Soit  $f(z)$  une fonction continue définie dans un secteur

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

$r$  et  $\theta$  désignant le module et l'argument de  $z$ . Si

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0 \quad (\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2),$$

alors l'intégrale  $\int f(z) dz$  étendue à l'arc de cercle de rayon  $r$  contenu dans le secteur, tend vers 0 lorsque  $r$  tend vers 0.

Exemple. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

La fonction  $\frac{1}{1+z^6}$  possède six pôles, tous sur le cercle-unité; les trois pôles situés dans le demi-plan supérieur sont

$$e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Le résidu en un tel pôle est égal à  $\frac{1}{6z^3} = -\frac{z}{6}$ . D'où

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = -\frac{\pi i}{6} \left( e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{2\pi}{6}} + e^{i\frac{3\pi}{6}} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \left( 2 \sin \frac{\pi}{6} + 1 \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

3<sup>e</sup> type. On se propose d'étudier les intégrales de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx,$$

où  $f(z)$  est une fonction holomorphe au voisinage de tout point du demi-plan fermé  $y \geq 0$ , sauf peut-être pour un nombre fini de points. On va d'abord considérer le cas où les points singuliers ne sont pas sur l'axe réel. Alors l'intégrale

$$\int_{-r}^{+r} f(x) e^{ix} dx$$

a un sens, et, lorsque  $r$  tend vers  $+\infty$ , sa valeur tend vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$$

lorsque cette dernière intégrale est convergente.

On se propose de démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 3. 1. Si  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$  pour  $y \geq 0$ , alors

$$(3. 1) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum \text{Res} (f(z) e^{iz}),$$

la sommation étant étendue aux points singuliers de  $f(z)$  contenus dans le demi-plan supérieur  $y > 0$ .

Observons d'abord que si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  est convergente, l'intégrale proposée  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$  est absolument convergente; la relation 3. 1 donnera alors

$$(3. 2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum \text{Res} (f(z) e^{iz}).$$

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$  peut aussi être convergente sans être absolument convergente; par exemple il est bien connu que si la fonction  $f(x)$  est réelle et monotone pour  $x > 0$ , et tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , l'inté-

grale  $\int_0^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$  est convergente (on applique la deuxième formule de la moyenne); dans un tel cas la relation (3. 2) sera encore valable.

Avant de commencer la démonstration de la proposition 3. 1, observons que  $|e^{iz}| \leq 1$  dans le demi-plan  $y \geq 0$ . Ceci nous conduit à faire une intégration dans le demi-plan  $y \geq 0$ , le long du contour déjà utilisé pour le deuxième type ci-dessus. Avec les mêmes notations que dans (2. 2), nous

allons montrer que l'intégrale  $\int_{\delta(r)} f(z) e^{iz} dz$  tend vers 0 lorsque  $r$  tend vers  $+\infty$ .

La proposition 3. 1 en résultera évidemment.

Si l'on savait que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ , il suffirait d'appliquer le lemme 1. La relation (3. 1) est donc démontrée dans ce cas. Par exemple, considérons l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx \right);$$

sa valeur est égale à  $\pi i \sum \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \right)$ , la sommation étant étendue aux pôles situés dans le demi-plan supérieur. Il y a un seul pôle  $z = i$ ; il est simple, et le résidu est

$$\frac{e^{-1}}{2i}, \quad \text{d'où} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Pour prouver que  $\int_{\delta(r)} f(z) e^{iz} dz$  tend vers 0 sous la seule hypothèse de l'énoncé de la proposition 3. 1, on utilisera le lemme suivant :

LEMME 3. Soit  $f(z)$  une fonction définie dans un secteur du demi-plan  $y \geq 0$ .

Si  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(z) = 0$  l'intégrale  $\int f(z) e^{iz} dz$  étendue à l'arc de cercle de centre 0 et de rayon  $r$  contenu dans le secteur tend vers 0 lorsque  $r$  tend vers  $+\infty$ .

Posons en effet  $z = re^{i\theta}$ , et soit  $M(r)$  la borne supérieure de  $|f(re^{i\theta})|$  lorsque  $\theta$  varie, le point  $re^{i\theta}$  restant dans le secteur. On a

$$(3. 3) \quad \left| \int f(z) e^{iz} dz \right| \leq M(r) \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} r d\theta$$

On va montrer que  $\int_0^\pi e^{-r \sin \theta} r d\theta$  est majoré par un nombre fixe indépendant de  $r$ , ce qui achèvera la démonstration du lemme 3. En fait on a

$$(3. 4) \quad \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} r d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin \theta} r d\theta \leq \pi.$$

Démonstration de (3. 4) : on a

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin \theta} r d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} r \theta} r d\theta \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi} r \theta} r d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi la proposition 3. 1 est entièrement démontrée.

Examinons maintenant le cas où la fonction  $f(z)$  peut posséder des points singuliers sur l'axe réel. On se bornera à un exemple, celui où  $f(z)$  possède un pôle simple à l'origine. Dans ce cas il convient de modifier le chemin d'intégration de façon à contourner l'origine le long d'un demi-cercle  $\gamma(\varepsilon)$  de petit rayon  $\varepsilon > 0$ , centré à l'origine et situé dans le demi-plan supérieur (fig. 7). Nous utiliserons le lemme suivant :

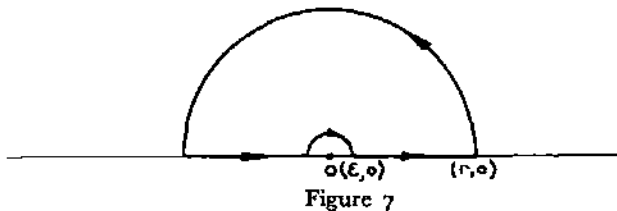


Figure 7

LEMME 4. Si  $z = 0$  est un pôle simple de  $g(z)$ , on a

$$(3. 5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} g(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(g, 0),$$

$\gamma(\varepsilon)$  étant parcouru dans le sens des arguments croissants.

En effet, on a  $g(z) = \frac{a}{z} + h(z)$ , où  $h$  désigne une fonction holomorphe à l'origine. L'intégrale  $\int_{\gamma(\varepsilon)} h(z) dz$  tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, et l'intégrale  $\int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{a}{z} dz$  est égale à  $\pi ia$ . D'où la relation (3. 4).

On appliquera ce lemme à la fonction  $g(z) = f(z) e^{iz}$ .

Exemple : Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right].$$

D'après la figure 7, ceci est égal à

$$\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz = \frac{\pi}{2} \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

*Remarque importante* : si, au lieu de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ax} dx$ , on avait eu à calculer l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix} dx$ , il eût fallu intégrer dans le demi-plan inférieur au lieu du demi-plan supérieur; en effet, c'est dans le demi-plan inférieur  $y \leq 0$  que la fonction  $|e^{-iz}|$  est bornée et c'est dans ce demi-plan que le lemme 3 est valable (mutatis mutandis). Plus généralement, une intégrale de la forme  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ax} dx$  (où  $a$  est une constante complexe) se calculera en intégrant dans le demi-plan où  $|e^{az}| \leq 1$ .

On n'oubliera jamais que  $\sin z$ ,  $\cos z$  ne sont bornés dans aucun demi-plan. Pour calculer une intégrale de l'une des formes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin^n x dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos^n x dx,$$

on exprimera toujours les fonctions trigonométriques à l'aide de l'exponentielle complexe, de façon à pouvoir appliquer la méthode précédente.

4<sup>e</sup> type. Considérons les intégrales de la forme

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx,$$

où  $\alpha$  désigne un nombre réel tel que  $0 < \alpha < 1$ , et  $R$  désigne une fonction rationnelle sans pôle sur le demi-axe réel  $x \geq 0$ . Il est clair qu'une telle intégrale converge pour la limite d'intégration 0; pour qu'elle converge pour la limite d'intégration  $+\infty$ , il faut et il suffit que la partie principale de  $R(x)$  à l'infini soit de la forme  $\frac{1}{x^n}$ , avec  $n \geq 1$ ; autrement dit il faut et il suffit que

$$(4.1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0.$$

Pour calculer une telle intégrale, on considère la fonction  $f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$  de la variable complexe  $z$ , définie dans le plan privé du demi-axe réel  $\geq 0$ ; soit  $D$  l'ouvert ainsi défini. Il convient de préciser la détermination choisie pour  $z^\alpha$  dans  $D$ : on prendra la détermination de l'argument de  $z$  comprise entre 0 et  $2\pi$ .

Avec cette convention, intégrons  $\frac{R(z)}{z^\alpha}$  le long du chemin fermé  $\delta(r, \varepsilon)$  défini comme suit: on parcourt successivement l'axe réel de  $\varepsilon > 0$  à  $r > 0$ , puis le cercle  $\gamma(r)$ , de centre 0 et de rayon  $r$ , dans le sens direct, puis l'axe réel de  $r$  à  $\varepsilon$ , et enfin le cercle  $\gamma(\varepsilon)$ , de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ , dans le sens indirect (cf. figure 8). L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta(r, \varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz$$



est égale à la somme des résidus des pôles de  $\frac{R(z)}{z^\alpha}$  contenus dans  $D$ , si  $r$  a été choisi assez grand et  $\epsilon$  assez petit. On a

$$\int_{\delta(r, \epsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \int_{\gamma(r)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\gamma(\epsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + (1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_{\epsilon}^r \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$$

car, lorsque l'argument de  $z$  est égal à  $2\pi$ , on a  $z^\alpha = e^{2\pi i \alpha} |z|^\alpha$ . Puisque l'argument de  $z$  reste borné,  $zf(z)$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers 0 ou quand  $|z|$

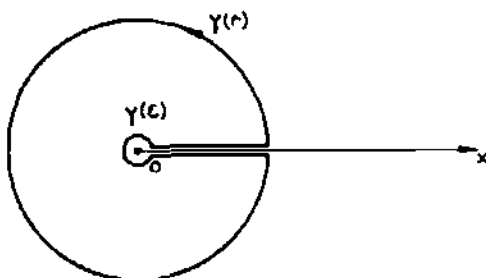


Figure 8

tend vers l'infini; donc les intégrales le long de  $\gamma(r)$  et de  $\gamma(\epsilon)$  tendent vers 0 quand  $r$  tend vers  $\infty$  et quand  $\epsilon$  tend vers 0 (lemmes 1 et 2). À la limite, on obtient donc

$$(4.2) \quad (1 - e^{-2\pi i \alpha})I = 2\pi i \sum \operatorname{Res} \left( \frac{R(z)}{z^\alpha} \right),$$

et cette relation permet de calculer  $I$ .

*Exemple.* Soit à calculer  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ , ( $0 < \alpha < 1$ ). On a ici  $R(z) = \frac{1}{1+z}$ ; il y a un seul pôle,  $z = -1$ ; le résidu de  $\frac{R(z)}{z^\alpha}$  en ce pôle est égal à  $\frac{1}{e^{-i\alpha}}$ , compte tenu de la détermination de l'argument de  $z$ , qui est égale à  $\pi$  en ce point. La relation (4.2) donne alors

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

5° type. Considérons les intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty} R(x) \log x \, dx,$$

où  $R$  est une fonction rationnelle sans pôle sur le demi-axe réel  $x \geq 0$ , et telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x) = 0$ . Cette dernière condition assure la convergence de l'intégrale.

On considère le même ouvert  $D$  que pour les intégrales du 4<sup>e</sup> type, et le même chemin d'intégration. Ici encore, il convient de préciser la détermination choisie pour  $\log z$ ; on choisira l'argument de  $z$  compris entre 0 et  $2\pi$ . Pour une raison qui va apparaître immédiatement, ce n'est pas la fonction  $R(z) \log z$  que l'on va intégrer, mais la fonction  $R(z) (\log z)^2$ . Ici encore les intégrales le long des cercles  $\gamma(r)$  et  $\gamma(s)$  tendent vers 0 quand  $r$  tend vers  $\infty$  et  $s$  vers 0, à cause des lemmes 1 et 2. Lorsque l'argument de  $z$  est égal à  $2\pi$ , on a

$$\log z = \log x + 2\pi i,$$

$x$  désignant le module de  $z$ . On obtient ainsi la relation

$$\int_0^{+\infty} R(x) (\log x)^2 dx - \int_0^{+\infty} R(x) (\log x + 2\pi i)^2 dx = 2\pi i \sum \text{Res} \{R(z) (\log z)^2\};$$

d'où

$$(5. 1) \quad -2 \int_0^{+\infty} R(x) \log x dx - 2\pi i \int_0^{+\infty} R(x) dx = \sum \text{Res} \{R(z) (\log z)^2\}.$$

En principe, ceci donne seulement une relation entre les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} R(x) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} R(x) \log x dx. \text{ Toutefois, supposons que la fonction}$$

rationnelle  $R$  soit *réelle* (c'est-à-dire prenne des valeurs réelles pour  $x$  réel); en séparant le réel de l'imaginaire dans la relation (5. 1), on obtient les deux relations

$$(5. 2) \quad \int_0^{+\infty} R(x) \log x dx = -\frac{1}{2} \text{Re} \left( \sum \text{Res} \{R(z) (\log z)^2\} \right),$$

$$(5. 3) \quad \int_0^{+\infty} R(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \left( \sum \text{Res} \{R(z) (\log z)^2\} \right).$$

La sommation s'étend à tous les pôles de la fonction rationnelle  $R(z)$  contenus dans  $D$ .

*Exemple.* Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx.$$

Le résidu de  $\frac{(\log z)^2}{(1+z)^3}$  au pôle  $z = -1$  est égal au coefficient de  $t^2$  dans le développement limité de  $(i\pi + \log(1-t))^2$ ; c'est donc  $1 - i\pi$ , et on trouve  $I = -\frac{1}{2}$ .

*Remarque.* En intégrant la fonction  $R(z) \log z$ , on obtiendrait de la même manière la formule

$$(5.4) \quad \int_0^{+\infty} R(x) dx = -\sum \operatorname{Res} \{ R(z) \log z \}.$$

La méthode précédente peut aussi s'appliquer, dans certains cas, lorsque la fonction rationnelle  $R$  possède un *pôle simple* au point  $x = 1$ ; dans ce cas l'intégrale  $\int_0^{+\infty} R(x) \log x dx$  a encore un sens, puisque la détermination principale de  $\log z$  admet le point 1 comme zéro simple. Il convient alors de modifier le contour d'intégration utilisé précédemment : lorsqu'on intègre le long de l'axe réel positif, l'argument de  $z$  étant égal à  $2\pi$ , on doit contourner le point  $z = 1$  le long d'un demi-cercle de centre 1 et de petit

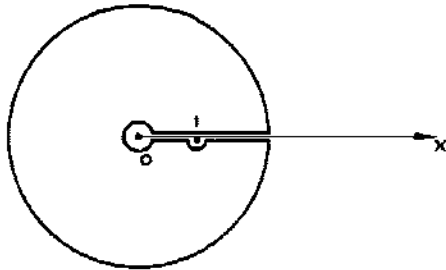


Figure 9

rayon (fig. 9). Le lecteur démontrera que lorsque la fonction  $R$  est réelle, on a la relation

$$(5.5) \quad \int_0^{+\infty} R(x) \log x dx = \pi^2 \operatorname{Re} (\operatorname{Res} (R, 1)) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\sum \operatorname{Res} (f))$$

où  $f$  désigne la fonction  $R(z) (\log z)^2$ , et où la sommation est étendue à tous les pôles de  $f$  autres que  $z = 1$ . Par exemple, on vérifiera que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

## Exercices

1. Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $|z| < R$ ,  $R > 1$ . Évaluer de deux manières différentes les intégrales

$$\int_{|z|=1} \left( 2 \pm \left( z + \frac{1}{z} \right) \right) \frac{f(z)}{z} dz$$

étendues au cercle-unité parcouru dans le sens direct, et en déduire les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = 2f(0) + f'(0), \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = 2f(0) - f'(0). \end{cases}$$

2. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque  $|z| \leq R$ , et soit  $\gamma$  l'image du cercle  $|z| = R$  par l'application  $z \rightarrow f(z)$ ; on supposera  $f$  univalente, i.e.  $f(z) \neq f(z')$  si  $z \neq z'$ . Montrer que la longueur  $L$  de  $\gamma$  est égale à  $R \int_0^{2\pi} |f'(Re^{i\theta})| d\theta$ ; en déduire que l'on a

$$L \geq 2\pi R |f'(0)|.$$

Montrer, dans les mêmes conditions, que l'aire  $A$  de l'image du disque fermé  $|z| \leq R$ , par la même application, est donnée par :

$$A = \iint_{|z| \leq R} |f'(x + iy)|^2 dx dy;$$

en déduire l'inégalité suivante :

$$A \geq \pi R^2 |f'(0)|^2.$$

(Passer en coordonnées polaires, et remarquer que l'on a, pour  $0 \leq r \leq R$ ,

$$\begin{aligned} |f'(0)|^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} f'(re^{i\theta}) d\theta \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta, \end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.)

3. Montrer que, si  $f(z)$  est holomorphe dans un ouvert contenant le disque fermé  $|z| \leq 1$ , on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a} dz = \begin{cases} \overline{f(0)} & \text{si } |a| < 1, \\ \overline{f(0)} - \overline{f(1/\bar{a})} & \text{si } |a| > 1, \end{cases}$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct. (Utiliser l'Exerc. 1. b) du chapitre II et la formule intégrale de Cauchy.)

4. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le plan tout entier, et supposons qu'il existe un entier  $n$ , deux nombres réels positifs  $R, M$ , tels que l'on ait

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^n \quad \text{pour } |z| \geq R.$$

Montrer qu'alors  $f(z)$  est un polynôme de degré au plus  $n$ .

5. Soit  $f$  une fonction holomorphe non constante dans un ouvert connexe  $D$ , et soit  $D'$  un ouvert connexe tel que son adhérence  $\overline{D'}$  soit compacte et contenue dans  $D$ . Montrer que, si  $|f(z)|$  est constant sur la frontière de  $D'$ , il existe au moins un zéro de  $f(z)$  dans  $D'$ . (Démonstration par l'absurde, en considérant  $1/f(z)$ .)

6. Soient  $D$  un ouvert borné et connexe, et considérons  $n$  points  $P_1, P_2, \dots, P_n$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que le produit  $\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} \cdot \dots \cdot \overline{PP_n}$  des distances d'un point  $P$ , variant dans l'adhérence  $\overline{D}$ , aux points  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , atteint son maximum en un point de la frontière de  $D$ .

7. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le disque  $|z| < R$ , et posons  $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ , pour  $0 \leq r < R$ . Montrer que

a)  $M(r)$  est une fonction continue et croissante (au sens large) de  $r$  dans  $0 \leq r < R$ ;

b) si  $f(z)$  n'est pas constante,  $M(r)$  est strictement croissante.

8. « Théorème des trois cercles » d'Hadamard : soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans un ouvert contenant la couronne fermée

$$r_1 \leq |z| \leq r_2 \quad (0 < r_1 < r_2),$$

et posons  $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ , pour  $r_1 \leq r \leq r_2$ . Montrer que l'on a l'inégalité suivante :

$$(1) \quad M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}} M(r_2)^{\frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}},$$

pour  $r_1 \leq r \leq r_2$ . (Appliquer le principe du maximum à la fonction  $z^p (f(z))^q$ , avec  $p, q$  entiers et  $q > 0$ ; choisir ensuite  $\alpha$  réel tel que  $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$ , et une suite de couples d'entiers  $(p_n, q_n)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n = \alpha$ .) Vérifier que l'inégalité (1) exprime que  $\log M(r)$  est une fonction convexe de  $\log r$ , pour  $r_1 \leq r \leq r_2$ .

9. Soit  $f(z)$  holomorphe dans  $|z| < R$ , et posons

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta, \quad \text{pour } 0 \leq r < R.$$

Montrer que, si  $a_n$  désigne le  $n$ -ième coefficient de Taylor de  $f(z)$  au point  $z = 0$ , on a

$$I_2(r) = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n};$$

en déduire que, si  $0 \leq r < R$ ,

- (i)  $I_2(r)$  est une fonction continue croissante de  $r$  (au sens large);  
 (ii) on a  $|f(0)|^2 \leq I_2(r) \leq (M(r))^2$ , ( $M(r)$  a le même sens que dans 7));  
 (iii)  $\log I_2(r)$  est une fonction convexe de  $\log r$ , dans le cas où  $f$  n'est pas identiquement nulle (montrer que, si on pose

$$s = \log r, \quad J(s) = I_2(e^s) = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 e^{2ns}, \quad \text{on a} \quad (\log J)'' = \frac{J''J - (J')^2}{J^3};$$

pour montrer que  $JJ'' - (J')^2 \geq 0$ , utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les séries absolument convergentes :

$$\left| \sum_{n \geq 0} \alpha_n \bar{\beta}_n \right|^2 \leq \left( \sum_{n \geq 0} |\alpha_n|^2 \right) \left( \sum_{n \geq 0} |\beta_n|^2 \right)$$

10. Soit  $f$  une fonction holomorphe dans le disque  $|z| < 1$ , telle que  $|f(z)| < 1$  dans ce disque; s'il existe deux points  $a, b$  distincts dans le disque tels que  $f(a) = a, f(b) = b$ , alors on a  $f(z) = z$  dans le disque.

(Considérer la fonction  $g(z) = \frac{h(z) \cdot -a}{1 - \bar{a}h(z)}$ , avec  $h(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)$ , pour laquelle on a  $g(0) = 0, g\left(\frac{b-a}{1-\bar{a}b}\right) = \frac{b-a}{1-\bar{a}b}$ , et  $|g(z)| < 1$  dans le disque).

11. Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque  $|z| \leq R$ . On pose, pour  $0 \leq r \leq R$ ,

$$A(r) = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \operatorname{Re}(f(re^{i\theta})).$$

(i) Montrer que  $A(r)$  est une fonction continue croissante (au sens large) de  $r$  (remarquer que  $e^{\operatorname{Re}(f(z))} = |e^{f(z)}|$ ).

(ii) Montrer que, si on a de plus  $f(0) = 0$ , on a, pour  $0 \leq r < R$ ,

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R).$$

(Considérer la fonction  $g(z) = f(z)/(2A(R) - f(z))$ .)

(iii) Montrer que l'on a, pour  $0 \leq r < R$ ,

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|$$

12. Soit  $x$  un paramètre complexe.

(i) Montrer que le développement de Laurent de la fonction

$$\exp\left(x\left(z + \frac{1}{z}\right)/2\right)$$

à l'origine  $z = 0$ , est de la forme suivante :

$$\exp\left(x\left(z + \frac{1}{z}\right)/2\right) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \quad \text{pour } 0 < |z| < +\infty,$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos nt \, dt, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Montrer que l'on a de même pour la fonction  $\exp\left(x\left(z - \frac{1}{z}\right)/2\right)$ , le développement suivant :

$$\exp\left(x\left(z - \frac{1}{z}\right)/2\right) = b_0 + \sum_{n \geq 1} b_n \left(z^n + \frac{(-1)^n}{z^n}\right) \quad \text{pour } 0 < |z| < +\infty,$$

avec

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) \, dt, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

(Remarquer que, si  $z' = -1/z$ , on a

$$\exp(x(z' - 1/z')/2) = \exp(x(z - 1/z)/2), \quad \text{pour } 0 < |z| < +\infty).$$

(ii) Soient  $m, n$  deux entiers  $\geq 0$ . Montrer que l'on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2 + 1)^m dz}{z^{m+n+1}} = \begin{cases} \frac{(\pm 1)^p (n + 2p)!}{p! (n + p)!}, & \text{si } m = n + 2p, \text{ avec } p \\ & \text{entier } \geq 0, \\ 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

et en déduire les développements en séries entières de  $a_n, b_n$  comme fonctions du paramètre  $x$  ( $b_n$ , comme fonction de  $x$ , porte le nom de fonction de Bessel de première espèce).

13. Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe au voisinage de l'origine  $z = 0$ , et admettant un pôle simple à l'origine. Soit  $x$  un nombre complexe quelconque. Montrer que le développement de Laurent de la fonction de  $z$

$$\frac{f'(z)}{f(z) - x}$$

a la forme suivante :

$$-\frac{1}{z} + u_1 + u_2 z + \dots + u_{n+1} z^n + \dots,$$

où  $u_n$  est un polynôme en  $x$ , de degré  $n$  exactement. (On pourra faire une identification, en utilisant le développement de Taylor de la fonction  $zf(z)$ .)

14. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur  $P^+$  défini par  $\text{Im}(z) > 0$ ; supposons  $f(z+1) = f(z)$  pour tout  $z \in P^+$ . Montrer qu'il existe une fonction holomorphe  $g(t)$  dans le disque pointé  $0 < |t| < 1$ , telle que l'on ait

$$f(z) = g(e^{2\pi iz}), \quad \text{pour } z \in P^+.$$

En déduire que  $f(z)$  possède un développement de la forme suivante :

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < +\infty} a_n e^{2\pi inz},$$

avec

$$a_n = \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n(x+iy)} dx,$$

pour  $y > 0$  quelconque. Montrer que cette série converge normalement sur tout compact dans  $P^+$ . Montrer que, s'il existe une constante  $M > 0$  et un entier  $n_0$  tels que l'on ait

$$|f(x+iy)| \leq M e^{2\pi n_0 y} \quad \text{pour tout } y \text{ assez grand,}$$

et uniformément en  $x$ , alors le développement est de la forme suivante :

$$f(z) = \sum_{n \geq -n_0} a_n e^{2\pi inz}$$

15. (i) Montrer que la fonction  $f(z) = 1/(e^z - 1)$  est méromorphe dans le plan  $\mathbb{C}$  tout entier, et admet les points  $z = 2p\pi i$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , comme pôles simples. Calculer le développement de Laurent au point  $z = 2p\pi i$ . Si  $a_n$  ( $n \geq -1$ ) désigne les coefficients du développement pour  $p = 0$ , montrer que  $a_{2q} = 0$  pour  $q$  entier  $\geq 1$ , et que si on pose

$$B_n = (-1)^{n-1} (2n)! a_{2n-1} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

montrer que l'on a la relation de récurrence suivante :

$$\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2(2n)!} + \sum_{1 \leq \nu \leq n} \frac{(-1)^{\nu-1} B_\nu}{(2\nu)! (2n - 2\nu + 1)!} = 0,$$

pour  $n \geq 1$  (par identification des coefficients dans les deux membres de la relation

$$\left( a_{-1}/z + \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \left( \sum_{m \geq 1} z^m / m! \right) = 1).$$



(ii) On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $f_{2n}(z) = \frac{1}{z^{2n}(e^z - 1)}$ .

Soit  $\gamma_m$  le périmètre du carré ayant pour sommets les points d'affixes  $\pm (2m+1)\pi \pm (2m+1)\pi i$ . Montrer que l'on a

$$|f_{2n}(z)| \leq 2/((2m+1)\pi)^{2n} \quad \text{si } z \text{ est sur } \gamma_m,$$

et en déduire, en intégrant  $f_{2n}(z)$  le long du contour  $\gamma_m$  dans le sens direct, et en faisant  $m \rightarrow \infty$ , que l'on a

$$\sum_{p \geq 1} 1/p^{2n} = \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2(2n)!}.$$

(N. B. Les nombres  $B_n$  s'appellent les nombres de Bernoulli.)

16. Soit  $c$  un point singulier essentiel d'une fonction holomorphe  $f(z)$  dans un disque pointé  $D : 0 < |z - c| < \rho$ .

(i) Quels que soient  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon > 0$ , montrer qu'il existe un  $z' \in D$  et un nombre réel  $\varepsilon' > 0$  tels que l'on ait

$$\overline{\Delta}(f(z'), \varepsilon') \subset \Delta \cap \Delta(\gamma, \varepsilon),$$

où  $\Delta$  désigne l'image de  $D$  par la transformation  $z \rightarrow f(z)$ ; on note  $\Delta(b, r)$  (resp.  $\overline{\Delta}(b, r)$ ) le disque ouvert (resp. fermé) centré en  $b$ , et de rayon  $r$  (Remarque que la proposition 4. 2 du § 5 entraîne que  $\Delta$  est ouvert (cela résulte aussi du théorème du chapitre VI, § 1, n° 3), et utiliser le théorème de Weierstrass, n° 4, du § 4).

(ii) Soient  $D_n$  le disque pointé  $0 < |z - c| < \rho/2^n$ , et  $\Delta_n$  son image par  $f$ , pour  $n \geq 0$ . Étant donnés  $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , montrer, par récurrence sur  $n$ , l'existence d'une suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  de nombres réels positifs tels que  $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ , et d'une suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  de points de  $D$ , satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}(f(z_1), \varepsilon_1) &\subset \Delta \cap \Delta(\gamma_0, \varepsilon_0), \\ z_n \in D_{n-1}, \quad \Delta(f(z_{n+1}), \varepsilon_{n+1}) &\subset \Delta \cap \Delta(f(z_n), \varepsilon_n) \quad \text{pour } n \geq 1; \end{aligned}$$

en déduire qu'il existe  $\gamma \in \Delta(\gamma_0, \varepsilon_0)$  et une suite  $(c_n)_{n \geq 0}$  de points de  $D$  telle que

$$f(c_n) = \gamma \quad \text{pour tout } n, \quad \lim c_n = c;$$

donc  $f$  n'est univalente dans aucun disque pointé  $0 < |z - c| < r$ , aussi petit que soit  $r > 0$ .

17. Soit  $\varphi : (x, y, u) \rightarrow z$  la projection stéréographique de  $S_2 - P$  sur  $\mathbb{C}$ .

(i) Exprimer  $x, y$  et  $u$  en fonction de  $z$ .

(ii) Montrer que si  $C$  est un cercle de  $S_2$ , qui ne passe pas par  $P$ ,  $\varphi(C)$  est un cercle dans le plan  $\mathbb{C}$ , et que si  $C$  passe par  $P$ ,  $\varphi(C - P)$  est une droite dans  $\mathbb{C}$ .

(iii) Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ; pour que  $\varphi^{-1}(z_1), \varphi^{-1}(z_2)$  soient antipodaux, il faut et il suffit que l'on ait  $z_1 \bar{z}_2 = -1$ .

(iv) Montrer que la distance  $\overline{P_1 P_2}$  (dans  $\mathbb{R}^3$ ) entre

$$P_1 = \varphi^{-1}(z_1) \quad \text{et} \quad P_2 = \varphi^{-1}(z_2)$$

est donnée par la formule suivante :

$$\overline{P_1 P_2} = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}.$$

Que devient cette formule quand  $z_2$  tend vers le point à l'infini?

18. Montrer qu'une fonction méromorphe partout sur la sphère de Riemann est nécessairement rationnelle. (Montrer d'abord qu'une telle fonction n'a qu'un nombre fini de pôles.)

19. Théorème de Rouché : soient  $f(z), g(z)$  deux fonctions holomorphes dans un ouvert  $D$ , et soit  $\Gamma = (\Gamma_i)_{i \in I}$  le bord orienté d'un compact  $K$  contenu dans  $D$ . Si on a

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{sur } \Gamma,$$

montrer que le nombre de zéros de  $f(z) + g(z)$  dans  $K$  est égal au nombre de zéros de  $f(z)$  dans  $K$ . (Considérer les chemins fermés  $f \circ \Gamma_i, i \in I$ , et appliquer la proposition 4. 1 du § 5, et la proposition 8. 3 du chapitre II, § 1).

*Exemple.* Si  $f(z)$  est holomorphe dans un ouvert contenant le disque fermé  $|z| \leq 1$ , et si  $|f(z)| < 1$  pour  $|z| = 1$ , alors l'équation  $f(z) = z^n$  admet exactement  $n$  solutions dans  $|z| < 1$ , pour tout entier  $n \geq 0$ .

20. Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a + bx^2)^n} \quad (a, b > 0), \quad (ii) \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx \quad (a, b \text{ réels}),$$

$$(iii) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - a^2 \sin x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0), \quad (iv) \int_0^{2\pi} \frac{\cos nt dt}{1 - 2a \cos t + a^2} \quad (|a| \neq 1) \text{ (intégrer}$$

la fonction  $z^n/(z - a)(z - 1/a)$  sur le cercle unité).

21. Intégrer la fonction  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2) \log z}$ , où  $\log$  désigne la détermination telle que  $-\pi \leq \arg z \leq \pi$ , le long du chemin fermé  $\delta(r, \epsilon)$

défini comme suit : on parcourt successivement l'axe réel négatif de  $-r$  à  $-\varepsilon$ , puis le cercle  $\gamma(\varepsilon)$ , de centre  $o$  et de rayon  $\varepsilon$ , dans le sens indirect, puis l'axe réel négatif de  $-\varepsilon$  à  $-r$ , et enfin le cercle  $\gamma(r)$ , de centre  $o$  et de rayon  $r$ , dans le sens direct ( $0 < \varepsilon < a < r$ ); en déduire que l'on a

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)((\log x)^2 + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a((\log a)^2 + \pi^2/4)} - \frac{1}{1 + a^2}.$$

22. Soient  $a > 0$  et  $\nu$  réel. Montrer que l'on a

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \nu x \, dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a} = \frac{\pi \sin \nu a}{\operatorname{sh} \pi \nu \operatorname{sh} a},$$

en intégrant la fonction  $e^{z\nu}/(\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} a)$  le long du périmètre du rectangle ayant pour sommets  $\pm R$ ,  $\pm R + 2\pi i$ .

23. (i) Soit  $n$  un entier  $\geq 2$ . Montrer que l'on a

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)},$$

en intégrant la fonction  $1/(1 + z^n)$  le long du contour formé par le segment  $[0, R]$  de l'axe réel positif, l'arc représenté par  $Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi/n$ , et le segment représenté par  $re^{2\pi i/n}$ ,  $0 \leq r \leq R$ .

(ii) Soient  $n$  un entier  $\geq 2$ , et  $\alpha$  un nombre réel tel que  $n > 1 + \alpha > 0$ . Évaluer par la même méthode l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha \, dx}{1 + x^n}.$$

24. Soient  $p, q$  deux nombres réels  $> 0$ ,  $n$  un entier  $\geq 1$ . En intégrant la fonction  $z^{n-1}e^{-pz}$  le long d'un contour analogue au précédent (dans l'exercice 23), mais avec l'angle à l'origine convenablement choisi, montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} \cos qx \, dx &= \frac{(n-1)! \operatorname{Re}(p+iq)^n}{(p^2 + q^2)^n}, \\ \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} \sin qx \, dx &= \frac{(n-1)! \operatorname{Im}(p+iq)^n}{(p^2 + q^2)^n}. \end{aligned}$$

(On rappelle que  $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} \, dx = (n-1)!$ .)

25. (i) Montrer que la fonction  $\pi \cotg \pi z$  est méromorphe dans tout le plan complexe, qu'elle a comme pôles simples les points  $z = n$ ,  $n$  entier, et que son résidu au pôle  $z = n$  est égal à 1 quel que soit  $n$ . Soit

$$f(z) = P(z)/Q(z)$$

une fraction rationnelle telle que  $\deg Q > \deg P + 1$ , et soient  $a_1, a_2, \dots, a_m$  ses pôles simples,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  les résidus correspondants. On suppose de plus que les  $a_q$  ne sont pas entiers, pour  $1 \leq q \leq m$ . Désignons par  $\gamma_n$  le périmètre du carré ayant pour sommets  $\pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) i$ ,  $n$  entier positif. Montrer qu'il existe deux nombres réels positifs  $M_1, K$ , qui ne dépendent pas de  $n$ , tels que l'on ait

- a)  $|\pi \cotg \pi z| \leq M_1$  sur  $\gamma_n$ ,  
 b)  $|f(z)| \leq K/|z|^2$  pour  $|z|$  assez grand.

En déduire que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} f(z) \pi \cotg \pi z dz = 0,$$

et que

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n \leq p \leq n} f(p) = - \sum_{1 \leq q \leq m} b_q \pi \cotg \pi a_q.$$

(Remarque : b) entraîne que  $\lim_{n, n' \rightarrow \infty} \sum_{-n \leq p \leq n'} f(p)$  existe, donc on peut remplacer le premier membre de (1) par  $\sum_{-\infty < p < \infty} f(p)$ .)

Exemple :  $\sum_{n \geq 1} 1/(a + bn^2)$ ,  $\sum_{n \geq 1} n^2/(n^4 + a^4)$  ( $a, b$  réels positifs).

(ii) Montrer que la conclusion reste vraie même si on a seulement  $\deg Q > \deg P$ . Montrer d'abord qu'on peut écrire  $f(z) = g(z) + c/z$ , avec une constante  $c$ , une fraction rationnelle  $g(z)$  qui satisfait aux conditions de (i); montrer ensuite que  $\int_{\gamma_n} \frac{\cotg \pi z}{z} dz = 0$  (les intégrales prises

sur deux côtés opposés se détruisent. Remarque :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n \leq p \leq n} f(p)$  n'existe pas en général dans ce cas.)

Exemple : Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n \leq p \leq n} \frac{1}{x^2 - p^2}$ , et en déduire la valeur de  $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{x^2 - p^2}$ , pour  $x$  non entier.

(iii) Soit  $x$  un nombre réel tel que  $-\pi < x < \pi$ . Montrer que :  
 c) il existe un nombre réel positif  $M_2$ , qui ne dépend pas de  $n$ , tel que l'on ait

$$\left| \frac{e^{xz}}{\sin \pi z} \right| \leq M_2 \quad \text{sur } \gamma_n,$$

$$d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{e^{xz}}{\sin \pi z} dz = 0.$$

(Remarquer que l'on peut écrire

$$\int_{\gamma_n} \frac{e^{i\alpha z}}{\sin \pi z} dz = 2i \int_{\gamma_n'} \frac{\sin \alpha z}{\sin \pi z} dz + 2i \int_{\gamma_n''} \frac{\sin \alpha z}{\sin \pi z} dz$$

où  $\gamma_n'$  (resp.  $\gamma_n''$ ) désigne le segment de droite représenté par  $z = n + \frac{1}{2} + iy$ ,  $|y| \leq n + \frac{1}{2}$  (resp.  $z = x + i\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ,  $|x| \leq n + \frac{1}{2}$ ), et utiliser l'exercice 14) du chapitre I.) En déduire enfin que, si  $f(z)$  est une fraction rationnelle satisfaisant aux conditions de (ii), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n \leq p \leq n} (-1)^p f(p) e^{i\alpha p} = -\pi \sum_{1 \leq q \leq m} b_q \frac{e^{i\alpha a_q}}{\sin \pi a_q}$$

Exemple : prendre  $f(z) = 1/(x - z)$ , et montrer que, si  $-\pi < \alpha < \pi$ , on a

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\cos \alpha n}{x^2 - n^2} = \frac{\pi \cos \alpha x}{2x \sin \pi x} - \frac{1}{2x^2}, \\ \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n \sin \alpha n}{x^2 - n^2} = \frac{\pi \sin \alpha x}{2 \sin \pi x}, \end{cases}$$

pour  $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

# Fonctions analytiques de plusieurs variables; fonctions harmoniques

## 1. Séries entières à plusieurs variables

Dans ce qui suit, on se bornera à raisonner dans le cas de deux variables pour ne pas compliquer les notations; mais le raisonnement se transposerait sans difficulté au cas d'un nombre fini quelconque de variables.

### 1. L'ALGÈBRE $K[[X, Y]]$

Une série entière formelle en  $X$  et  $Y$  à coefficients dans un corps  $K$  est une expression de la forme  $S(X, Y) = \sum_{p, q \geq 0} a_{p, q} X^p Y^q$ , où les coefficients  $a_{p, q}$  appartiennent au corps  $K$ .

On définit, comme au chapitre 1, § 1, l'addition de deux séries entières formelles et la multiplication d'une série entière formelle par un scalaire. L'ensemble  $K[[X, Y]]$  des séries formelles est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps  $K$ . On définit le produit de deux séries entières formelles, et  $K[[X, Y]]$  devient une algèbre.

On définit l'ordre d'une série entière formelle non identiquement nulle : c'est le plus petit entier  $n$  tel que

$$\sum_{p+q=n} a_{p, q} X^p Y^q \neq 0.$$

On montre que l'ordre du produit de deux séries non nulles est égal à la somme des ordres de ces séries; en particulier,  $K[[X, Y]]$  est un anneau d'intégrité.

Nous ne développerons pas la théorie de la substitution de séries entières

formelles aux lettres X, Y, théorie qui ne présente du reste aucune difficulté particulière. Les séries que l'on substitue doivent être d'ordre  $\geq 1$ . A titre d'exercice, le lecteur pourra démontrer une proposition analogue à la proposition 5. 1 du § 1 du chapitre 1.

## 2. DOMAINE DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE MULTIPLE

On suppose désormais que le corps K est l'un des corps R ou C. Comme on le fait au chapitre 1, § 2, n° 3, on associe à chaque série formelle

$$\sum_{p, q \geq 0} a_{p, q} X^p Y^q$$

la série à termes positifs (ou nuls)

$$\sum_{p, q \geq 0} |a_{p, q}| (r_1)^p (r_2)^q,$$

$r_1$  et  $r_2$  désignant deux variables réelles  $\geq 0$ .

Soit  $\Gamma$  l'ensemble des points  $(r_1, r_2)$  du quart de plan  $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$ , tels que  $\sum_{p, q} |a_{p, q}| (r_1)^p (r_2)^q < +\infty$ . La série  $\sum_{p, q} a_{p, q} (z_1)^p (z_2)^q$  est donc *absolument convergente* pour tout couple de nombres (réels ou complexes)  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $|z_1| \leq r_1, |z_2| \leq r_2$ . L'ensemble  $\Gamma$  n'est pas vide, car il contient évidemment l'origine  $(0, 0)$ .

*Définition.* On appelle *domaine de convergence* de la série  $S(X, Y)$  l'ensemble  $\Delta$  des points du quart de plan  $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$  intérieurs à  $\Gamma$ .

Le domaine de convergence est donc un ensemble ouvert du quart de plan. Cet ensemble peut être vide : il est en effet facile de construire un exemple où  $\Gamma$  se réduit à l'origine.

Si on applique la définition précédente dans le cas d'une seule variable  $z$ , on voit que le domaine de convergence n'est pas autre chose que l'intervalle  $[0, \rho[$ ,  $\rho$  désignant le rayon de convergence de la série entière.

**PROPOSITION 2. 1.** *Pour que  $(r_1, r_2) \in \Delta$ , il faut et il suffit qu'il existe  $r'_1 > r_1, r'_2 > r_2$  tels que  $(r'_1, r'_2) \in \Gamma$ .*

La condition est nécessaire, puisque la série  $\sum |a_{p, q}| (r'_1)^p (r'_2)^q$  doit converger en tout point suffisamment voisin  $(r_1, r_2)$ . Elle est suffisante, car alors  $\Gamma$  contient tous les points  $(\rho_1, \rho_2)$  tels que  $\rho_1 \leq r'_1, \rho_2 \leq r'_2$ , et par suite le point  $(r_1, r_2)$  est intérieur à  $\Gamma$ .

En particulier, une condition nécessaire et suffisante pour que le domaine de convergence  $\Delta$  ne soit pas vide est qu'il existe au moins un couple  $(r_1, r_2)$  de nombres  $> 0$  tels que

$$\sum_{p, q} |a_{p, q}| (r_1)^p (r_2)^q < +\infty.$$

**PROPOSITION 2. 2.** *Si  $(r_1, r_2)$  appartient au domaine de convergence, la série  $S(z_1, z_2)$  converge normalement pour  $|z_1| \leq r_1, |z_2| \leq r_2$ . Si  $(|z_1|, |z_2|)$  n'appartient pas à l'adhérence de  $\Gamma$ , la série  $S(z_1, z_2)$  est divergente.*

La démonstration repose, comme dans le cas des séries à une variable, sur le lemme d'Abel :

**LEMME.** *Si  $|a_{p,q}|(r_1)^p(r_2)^q \leq M$  ( $M$  indépendant de  $p$  et  $q$ ), et si  $r_1 < r'_1, r_2 < r'_2$ , alors la série  $\sum_{p,q} a_{p,q}(z_1)^p(z_2)^q$  converge normalement pour  $|z_1| \leq r_1, |z_2| \leq r_2$ .*

Ce lemme se démontre aisément en majorant les valeurs absolues des termes de la série par les termes d'une progression géométrique double. On laisse au lecteur le soin de déduire la proposition 2. 2 du lemme d'Abel.

Par abus de langage, on appelle aussi « domaine de convergence » l'ensemble des couples  $(z_1, z_2)$  tels que  $(|z_1|, |z_2|)$  appartienne au domaine de convergence  $\Delta$ . De même, pour une seule variable complexe  $z$ , le domaine de convergence est le disque ouvert  $|z| < \rho$ ,  $\rho$  désignant le rayon de convergence.

### 3. OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES CONVERGENTES.

**PROPOSITION 3. 1** (addition et multiplication des séries entières). *Soit un ouvert  $D$  contenu dans le domaine de convergence de la série  $A(X, Y)$  et dans celui de la série  $B(X, Y)$ . Alors  $D$  est contenu dans le domaine de convergence de chacune des séries.*

$$S(X, Y) = A(X, Y) + B(X, Y), \quad P(X, Y) = A(X, Y) \cdot B(X, Y).$$

De plus, si  $(|z_1|, |z_2|) \in D$ , on a

$$S(z_1, z_2) = A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2), \quad P(z_1, z_2) = A(z_1, z_2) \cdot B(z_1, z_2).$$

La démonstration est analogue à celle donnée dans le cas des séries à une variable.

On définit d'une manière évidente les dérivées partielles d'une série entière  $S(X, Y) = \sum_{p,q} a_{p,q} X^p Y^q$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial X} &= \sum_{p,q} p a_{p,q} X^{p-1} Y^q, \\ \frac{\partial S}{\partial Y} &= \sum_{p,q} q a_{p,q} X^p Y^{q-1}. \end{aligned} \right\}$$

**PROPOSITION 3. 2.** *La série  $\frac{\partial S}{\partial X}$  a même domaine de convergence que la série  $S$ . Lorsque  $(|z_1|, |z_2|)$  est dans ce domaine, la fonction  $\frac{\partial S}{\partial X}(z_1, z_2)$  est la dérivée partielle (par rapport à la variable réelle ou complexe  $z_1$ ) de la fonction  $S(z_1, z_2)$ .*



La démonstration est calquée sur celle de la proposition 7. 1 du chapitre 1 § 2. Au moyen de dérivations successives on démontre la formule

$$(3. 1) \quad a_{p,q} = \frac{1}{p! q!} \frac{\partial^{p+q} S(0, 0)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}.$$

## 2. Fonctions analytiques

On considère ici des fonctions de plusieurs variables réelles ou complexes, définies dans un ensemble ouvert  $D$ . Pour simplifier on raisonnera sur le cas des fonctions de deux variables.

### 1. FONCTION DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE

*Définition.* On dit qu'une fonction  $f(x, y)$ , définie au voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$ , est *développable en série entière* au point  $(x_0, y_0)$  s'il existe une série entière formelle  $S(X, Y)$  dont le domaine de convergence ne soit pas vide et telle que l'on ait :

$$f(x, y) = S(x - x_0, y - y_0)$$

pour  $|x - x_0|$  et  $|y - y_0|$  assez petits.

La série entière  $S$ , si elle existe, est *unique* d'après la formule (3. 1) du § 1. En raisonnant comme au chapitre 1, § 4, on établit les propriétés suivantes : Si  $f(x, y)$  est développable en série entière au point  $(x_0, y_0)$ , la fonction  $f$  est indéfiniment dérivable dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ . Le produit  $fg$  de deux fonctions  $f$  et  $g$  développables en série entière au point  $(x_0, y_0)$  est développable en série entière au point  $(x_0, y_0)$ ; si ce produit est identiquement nul dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ , alors l'une au moins des fonctions  $f$  et  $g$  est identiquement nulle au voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

### 2. FONCTIONS ANALYTIQUES; OPÉRATIONS SUR CES FONCTIONS

*Définition.* Une fonction  $f(x, y)$  à valeurs réelles ou complexes, définie dans l'ouvert  $D$ , est dite *analytique* dans  $D$ , si, pour tout point  $(x_0, y_0) \in D$ , la fonction  $f(x, y)$  est développable en série entière au point  $(x_0, y_0)$ .

Nous nous bornerons à énoncer sans démonstration les propriétés suivantes :

Les fonctions analytiques dans un ouvert  $D$  forment un anneau, et même une algèbre. Si  $f(x, y)$  est analytique dans  $D$ ,  $\frac{1}{f(x, y)}$  est analytique en tout point  $(x_0, y_0) \in D$  où  $f(x_0, y_0) \neq 0$ .

Toute fonction analytique dans  $D$  est indéfiniment dérivable, et ses dérivées sont des fonctions analytiques dans  $D$ . La composée de deux fonctions analytiques est analytique : d'une façon précise, si  $f(x, y, z)$  est analytique

dans  $D$ , et si  $g_1(u, v)$ ,  $g_2(u, v)$ ,  $g_3(u, v)$  sont analytiques dans un ouvert  $D'$  et prennent leurs valeurs dans  $D$ , alors la fonction composée  $f(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$  est analytique dans  $D'$ .

PROPOSITION 2. 1. *La somme d'une série entière multiple est une fonction analytique des variables dans le domaine de convergence.*

La démonstration serait analogue à celle de la proposition 2. 1 du § 4 du chapitre I. Le lecteur énoncera une proposition analogue à la proposition 2. 2 du même paragraphe.

### 3. PRINCIPE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE

THÉORÈME. *Soit  $f(x, y)$  une fonction analytique dans un ouvert connexe  $D$ , et soit  $(x_0, y_0) \in D$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  *$f$  et toutes ses dérivées s'annulent au point  $(x_0, y_0)$ ;*
- b)  *$f$  est identiquement nulle dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ ;*
- c)  *$f$  est identiquement nulle dans  $D$ .*

La démonstration est calquée sur celle du théorème du chapitre I, § 4, n° 3.

COROLLAIRE 1. *L'anneau des fonctions analytiques dans un ouvert connexe  $D$  est un anneau d'intégrité.*

COROLLAIRE 2 (principe du prolongement analytique). *Si deux fonctions analytiques  $f$  et  $g$  dans un ouvert connexe  $D$  coïncident au voisinage d'un point de  $D$ , elles sont identiques dans  $D$ .*

## 3. Fonctions harmoniques de deux variables réelles

### 1. DÉFINITION DES FONCTIONS HARMONIQUES

*Définition.* Une fonction  $f(x, y)$  des deux variables réelles  $x$  et  $y$  définie dans un ouvert  $D$  est dite *harmonique* dans  $D$  si elle est deux fois continûment différentiable et satisfait à la condition :

$$(1. 1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

L'opérateur différentiel  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  s'appelle le laplacien. On le note souvent  $\Delta$ .

On définirait de même les fonctions harmoniques d'un nombre fini quelconque de variables réelles; mais ce qui va suivre ne s'applique qu'au cas de deux variables.

Introduisons les différentiations  $\frac{\partial}{\partial z}$  et  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  par rapport à la variable complexe  $z = x + iy$  et à la variable conjuguée  $\bar{z} = x - iy$  (Cf. chapitre II, § 2, n° 3). On a

$$(1. 2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}},$$

et par suite la condition (1. 1) est équivalente à la suivante :

$$(1. 3) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

La relation (1. 3) exprime donc que  $f$  est une fonction harmonique.

*Remarque.* Les fonctions  $f$  considérées peuvent prendre des valeurs complexes ou des valeurs réelles. Pour qu'une fonction à valeurs complexes  $f = P + iQ$  ( $P$  et  $Q$  étant à valeurs réelles) soit harmonique, il faut et il suffit, d'après (1. 1), que  $P$  et  $Q$  soient harmoniques. Nous désignerons souvent  $P$  par la notation  $\text{Re}(f)$  et  $Q$  par  $\text{Im}(f)$ .

## 2. FONCTIONS HARMONIQUES ET FONCTIONS HOLOMORPHES

**PROPOSITION 2. 1.** *Toute fonction holomorphe est harmonique.*

En effet, si  $f$  est holomorphe elle est indéfiniment dérivable. De plus on a  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , et en prenant la dérivée  $\frac{\partial}{\partial z}$  on obtient la relation (1. 3).

**COROLLAIRE.** *La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont des fonctions harmoniques.*

Par exemple,  $\log |z|$  est une fonction harmonique dans tout le plan privé de l'origine; en effet, au voisinage de chaque point  $z \neq 0$ ,  $\log z$  possède une détermination, et  $\log |z|$  est la partie réelle d'une telle détermination.

**PROPOSITION 2. 2.** *Toute fonction réelle  $g(x, y)$  harmonique dans un ouvert  $D$  est, au voisinage de chaque point de  $D$ , la partie réelle d'une fonction  $f$  holomorphe au voisinage de ce point, et déterminée à l'addition près d'une constante.*

*Démonstration.* Puisque  $g$  est harmonique, on a  $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ , et par conséquent  $\frac{\partial g}{\partial z}$  est holomorphe dans  $D$ . La forme différentielle  $z \frac{\partial g}{\partial z} dz$  admet donc localement une primitive  $f$ ; autrement dit, au voisinage de chaque point de

D, il existe une fonction  $f$ , déterminée à l'addition près d'une constante, telle que

$$(2. 1) \quad df = z \frac{\partial g}{\partial z} dz.$$

Cette relation prouve que  $f$  est holomorphe. Passons à l'imaginaire conjugué dans la relation (2. 1); on obtient

$$(2. 2) \quad d\bar{f} = z \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

puisque, la fonction  $g$  étant *réelle*, les fonctions  $\frac{\partial g}{\partial z}$  et  $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$  sont imaginaires conjuguées. En ajoutant (2. 1) et (2. 2) on obtient

$$\frac{1}{2} d(f + \bar{f}) = dg;$$

donc  $g$  est égale à la partie réelle de  $f$ , augmentée éventuellement d'une constante réelle.

Il reste à montrer que si deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , holomorphes au voisinage d'un même point, ont même partie réelle, leur différence  $f = f_1 - f_2$  est constante. Or on a  $d(f + \bar{f}) = 0$ , c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 0,$$

ce qui exige  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$ .

C.Q.F.D.

*Remarque.* Étant donnée une fonction  $g$  réelle et harmonique dans un ouvert  $D$ , il n'existe pas toujours de fonction  $f$  holomorphe dans  $D$  tout entier, et dont la partie réelle soit égale à  $g$ . Par exemple, si  $D$  est le plan privé de l'origine  $\log z$  n'est pas la partie réelle d'une fonction holomorphe dans  $D$ , puisque le logarithme de  $z$  ne possède pas de détermination uniforme dans  $D$ . La proposition 2. 2 exprime seulement que toute fonction harmonique réelle est *localement* la partie réelle d'une fonction holomorphe. Cependant :

**COROLLAIRE.** *Si  $D$  est un ouvert simplement connexe, toute fonction  $g$  réelle et harmonique dans  $D$  est la partie réelle d'une fonction  $f$  holomorphe dans  $D$ .*

En effet, la forme différentielle  $z \frac{\partial g}{\partial z} dz$  admet une primitive dans  $D$  (cf. chapitre II, § 1, n° 7, théorème 3).

### 3. LA PROPRIÉTÉ DE MOYENNE

On a vu au chapitre II, § 2, n° 1 que toute fonction holomorphe  $f$  dans un ouvert  $D$  possède la propriété de moyenne : pour tout disque fermé contenu dans  $D$ , la valeur de  $f$  au centre du disque est égale à la moyenne des valeurs de  $f$  sur le bord de ce disque.

PROPOSITION 3. 1. *Toute fonction harmonique dans D possède la propriété de moyenne.*

Il suffit de le démontrer pour une fonction harmonique à valeurs réelles; en effet le cas d'une fonction harmonique à valeurs complexes s'y ramène en séparant le réel et l'imaginaire.

Soit donc  $g$  harmonique réelle dans  $D$ , et soit  $S$  un disque fermé contenu dans  $D$ . D'après le corollaire de la proposition 2. 2, il existe une fonction  $f$  holomorphe au voisinage de  $S$  et dont la partie réelle soit  $g$ . La valeur de  $f$  au centre de  $S$  est égale à la moyenne de  $f$  sur le bord du disque; en prenant la partie réelle, on voit que la valeur de  $g$  au centre de  $S$  est égale à sa valeur moyenne sur le bord du disque. C.Q.F.D.

Nous verrons plus loin (§ 4, n° 4) que réciproquement, toute fonction continue qui possède la propriété de moyenne est harmonique. Autrement dit, la propriété de moyenne caractérise les fonctions harmoniques.

Au chapitre III, § 2, n° 2, on a démontré le *principe du maximum* pour toutes les fonctions continues (à valeurs réelles ou complexes) qui possèdent la propriété de moyenne. Le principe du maximum s'applique donc aux fonctions harmoniques.

#### 4. ANALYTICITÉ DES FONCTIONS HARMONIQUES

PROPOSITION 4. 1. *Toute fonction  $g(x, y)$ , harmonique dans un ouvert  $D$  du plan, est une fonction analytique des variables réelles  $x$  et  $y$  dans  $D$ . En particulier, toute fonction harmonique est indéfiniment dérivable.*

*Démonstration.* On peut supposer  $g$  à valeurs réelles. La question étant de nature locale (puisqu'il s'agit de montrer que  $g$  est analytique au voisinage de chaque point de  $D$ ), nous allons supposer que  $g(x, y)$  est harmonique dans le disque ouvert  $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$ . Dans ce disque,  $g$  est la partie réelle d'une fonction holomorphe  $f$ ;  $f$  est développable en série entière

$$(4.1) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Dans cette série, remplaçons  $z$  par  $x + iy$ , et considérons la série

$$(4.2) \quad \sum_{n \geq 0} a_n (x + iy)^n$$

comme une série entière à deux variables  $x$  et  $y$ , étant entendu que, dans (4.2),  $(x + iy)^n$  est remplacé par son développement

$$(4.3) \quad (x + iy)^n = \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} x^p (iy)^q.$$

Tous les points  $(x, y)$  tels que  $|x| + |y| < \varepsilon$  appartiennent au domaine de

convergence de la série double (4. 2). En effet, pour un tel  $(x, y)$ , il existe  $r_1 > |x|$  et  $r_2 > |y|$  tels que

$$r_1 + r_2 = r < \rho,$$

et l'on a

$$\sum_{p \geq 0, q \geq 0} \frac{(p+q)!}{p!q!} |a_{p+q}| (r_1)^p (r_2)^q = \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < +\infty.$$

En particulier, la somme de la série (4. 2) est une fonction *analytique* dans le produit des disques

$$(4. 4) \quad |x| < \frac{\rho}{2}, \quad |y| < \frac{\rho}{2}.$$

Soit  $\bar{f}(z) = \sum_{n \geq 0} \bar{a}_n z^n$  la somme de la série entière dont les coefficients  $\bar{a}_n$  sont conjugués des coefficients de la série  $f(z)$ . On a

$$(4. 5) \quad 2g(x, y) = f(x + iy) + \bar{f}(x - iy).$$

Pour la même raison que ci-dessus, la fonction  $\bar{f}(x - iy)$  est analytique dans l'ouvert (4. 4). Donc  $g(x, y)$  est une fonction analytique dans cet ouvert. Ainsi la fonction  $g$  est analytique au voisinage du centre de tout disque ouvert dans lequel elle est harmonique. On en déduit la proposition 4. 1.

#### 5. RECHERCHE D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DONT LA PARTIE RÉELLE EST DONNÉE

On a vu (proposition 2. 2) que toute fonction réelle harmonique  $g$  est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe  $f$ , que l'on obtient par une intégration. On va voir maintenant que lorsque  $g$  (qui est analytique) est donnée par un développement en série entière, on peut obtenir  $f$  sans intégration.

Supposons de nouveau  $g(x, y)$  harmonique dans le disque ouvert  $x^2 + y^2 < \rho^2$ , et reprenons les notations du n° 4.

Considérons les deux séries entières formelles à deux variables  $X$  et  $Y$ :

$$f(X + iY) = \sum_{n \geq 0} a_n (X + iY)^n, \quad \bar{f}(X - iY) = \sum_{n \geq 0} \bar{a}_n (X - iY)^n.$$

On vient de voir que leur domaine de convergence contient l'ouvert (4. 4). On va maintenant substituer à  $X$  et  $Y$  des nombres complexes  $x$  et  $y$ , pourvu qu'ils satisfassent à (4. 4); on obtiendra des séries absolument convergentes.

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $|z| < \rho$ . On a, d'après (4. 5),

$$(5. 1) \quad 2g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = f(z) + \bar{f}(0).$$

Dans cette relation, remplaçons  $z$  par  $0$ ; on obtient :

$$2g(0, 0) = f(0) + \bar{f}(0).$$

Par différence on a finalement la formule

$$(5.2) \quad 2g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - g(0, 0) = f(z) + \frac{1}{2}(\bar{f}(0) - f(0)).$$

La fonction cherchée  $f(z)$  est donc égale, à l'addition près d'une constante imaginaire pure, à la fonction connue

$$(5.3) \quad 2g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - g(0, 0),$$

obtenue par substitution de variables complexes dans le développement en série entière double de la fonction  $g(x, y)$  des variables réelles  $x$  et  $y$ .

*Remarque.* Dans ce qui précède, on avait supposé que la fonction  $g(x, y)$  était harmonique dans le disque  $x^2 + y^2 < \rho^2$ . Mais la relation (5.2) conserve un sens pour toute fonction  $g(x, y)$  analytique réelle et développable en série entière dans l'ouvert (4.4); la fonction  $f(z)$  qu'elle définit est développable en série entière pour  $|z| < \rho$ , donc holomorphe dans ce disque. Mais il n'est plus certain que  $g$  soit la partie réelle de la fonction holomorphe (5.3). On montrera, à titre d'exercice, que pour que  $g$  soit la partie réelle de (5.3), il faut et il suffit que  $g$  soit harmonique.

*Exemple :* considérons la fonction

$$g(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

On a

$$2g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \frac{2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{\cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}} = \operatorname{tg} z,$$

et par conséquent

$$f(z) = \operatorname{tg} z.$$

On peut vérifier que  $g$  est bien la partie réelle de  $\operatorname{tg} z$ ; donc la fonction donnée  $g$  est bien harmonique; c'est la partie réelle de  $\operatorname{tg} z$ .

## 4. Formule de Poisson; problème de Dirichlet

### 1. REPRÉSENTATION INTÉGRALE D'UNE FONCTION HARMONIQUE DANS UN DISQUE

Soit  $g(x, y)$  une fonction harmonique réelle dans le disque  $x^2 + y^2 < \rho^2$ ;  $g$  est la partie réelle d'une fonction holomorphe

$$(1.1) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

et l'on peut supposer  $a_0$  réel, ce qui achève de déterminer la fonction  $f$ .

Pour  $r < \rho$ , on a

$$(1.2) \quad g(r \cos \theta, r \sin \theta) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} r^n (a_n e^{in\theta} + \bar{a}_n e^{-in\theta}),$$

la convergence étant normale par rapport à  $\theta$  qui varie de 0 à  $2\pi$ . On a, au second membre de (1.2), un développement en série de Fourier dont les coefficients sont donnés par les formules intégrales

$$(1.3) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta,$$

$$(1.4) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(r \cos \theta, r \sin \theta)}{(re^{i\theta})^n} d\theta \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Remplaçons, dans le second membre de (1.1), les coefficients  $a_n$  par leurs valeurs tirées de (1.3) et (1.4). On obtient, pour  $|z| < r$ ,

$$(1.5) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos \theta, r \sin \theta) \left[ 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \left( \frac{z}{re^{i\theta}} \right)^n \right] d\theta,$$

car on peut échanger la sommation et l'intégration en raison de la convergence normale. Or

$$1 + 2 \sum_{n \geq 1} \left( \frac{z}{re^{i\theta}} \right)^n = \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z},$$

d'où finalement la formule

$$(1.6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} d\theta,$$

valable pour  $|z| < r$ .

Cette formule intégrale exprime la fonction holomorphe  $f(z)$  dans le disque  $|z| < r$  à l'aide de sa partie réelle sur le bord du disque.

Dans (1.6), prenons la partie réelle des deux membres. On obtient

$$(1.7) \quad g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

(avec  $z = x + iy$ ).

Cette formule est valable dans le disque ouvert  $x^2 + y^2 < r^2$ , quelle que soit la fonction  $g$  harmonique réelle dans le disque  $x^2 + y^2 < \rho^2$  (avec  $r < \rho$ ). En fait la formule (1.7) est aussi valable pour une fonction harmonique  $g$  à valeurs complexes, comme on le voit en séparant le réel de l'imaginaire. La relation (1.7) porte le nom de *formule de Poisson*, et la fonction  $\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}$  qui figure sous le signe d'intégration s'appelle le *noyau de Poisson*.



## 2. PROPRIÉTÉS DU NOYAU DE POISSON

Fixons  $r$  et  $\theta$ ; alors le noyau de Poisson est une fonction de  $z = x + iy$ , définie et harmonique en tout point sauf au point  $z = re^{i\theta}$ . Le fait que cette fonction est harmonique vient de ce qu'elle est la partie réelle de la fonction holomorphe  $\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}$ . Le noyau de Poisson est nul en tout point du cercle

$|z| = r$  autre que le point  $z = re^{i\theta}$ . Il est  $> 0$  dans le disque ouvert  $|z| < r$ .

Fixons maintenant  $r$  et  $z$ , avec  $|z| < r$ . Alors le noyau de Poisson est une fonction périodique de  $\theta$ , à valeurs strictement positives; si on considère cette fonction de  $\theta$  comme la densité d'une distribution de masses positives sur le cercle-unité, la masse totale de cette distribution est égale à  $+1$ , en vertu de la relation

$$(2. 1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta = 1$$

qui se déduit de (1. 7) en prenant pour  $g$  la constante 1 (qui est harmonique).

## 3. PROBLÈME DE DIRICHLET POUR UN DISQUE

Le problème de Dirichlet consiste en ceci : une fonction continue est donnée sur le cercle de centre 0 et de rayon  $r$ , au moyen d'une fonction continue  $f(\theta)$ , périodique de période  $2\pi$ . On se propose de trouver une fonction  $F(z)$  de la variable complexe  $z$ , définie et continue dans le disque fermé  $|z| \leq r$ , harmonique dans le disque ouvert  $|z| < r$ , et satisfaisant à

$$F(re^{i\theta}) = f(\theta).$$

En d'autres termes, il s'agit de prolonger la fonction continue donnée sur le cercle, en une fonction continue dans le disque fermé et harmonique dans le disque ouvert.

On se bornera à considérer le cas où les fonctions donnée  $f$  et inconnue  $F$  sont à valeurs réelles; le cas des fonctions à valeurs complexes s'y ramène en séparant le réel et l'imaginaire.

**THÉORÈME.** *Le problème de Dirichlet pour un disque possède une solution et une seule.*

Démontrons d'abord l'unicité de la solution si elle existe. Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux solutions du problème, la différence  $F_1 - F_2 = G$  est continue dans le disque fermé, harmonique dans le disque ouvert, nulle sur le bord du disque. Il suffit donc de prouver le :

**LEMME.** *Une fonction  $G$ , définie et continue dans un disque fermé, harmonique dans le disque ouvert, nulle sur le bord du disque, est identiquement nulle.*

En effet le disque fermé est compact;  $G$  atteint sa borne supérieure  $M$  en un point du disque fermé. Si  $M$  était  $> 0$ , ce point serait intérieur au disque. D'après le principe du maximum (cf. chapitre III, § 2),  $G$  serait constante et égale à  $M$  dans tout le disque ouvert, donc aussi dans le disque fermé par raison de continuité, et ceci contredit l'hypothèse suivant laquelle  $G$  est nulle sur le bord. Pour la même raison, la borne inférieure de  $G$  dans le disque fermé est 0. Donc  $G$  est identiquement nulle.

L'existence d'une solution du problème de Dirichlet va être établie au numéro suivant.

#### 4. SOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR UN DISQUE

Posons, pour  $|z| < r$ ,

$$(4.1) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta.$$

On va montrer que la fonction  $F$  ainsi définie est harmonique et que l'on a

$$(4.2) \quad f(\theta_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow re^{i\theta_0} \\ |z| < r}} F(z).$$

Donc la fonction  $F$ , prolongée par  $f$  sur le bord du disque, est une solution du problème de Dirichlet, ce qui achèvera d'établir le théorème du n<sup>o</sup> 3.

La fonction  $F$  définie dans l'intérieur du disque par la relation (4.1) est évidemment la partie réelle de

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} d\theta,$$

et ceci est une fonction holomorphe de  $z$  dans le disque ouvert, en vertu de la différentiation sous le signe d'intégration. Donc  $F$  est bien harmonique dans le disque ouvert.

Il reste à montrer la relation (4.2). Voici l'idée de cette démonstration : le noyau de Poisson définit une distribution de masses positives  $\varepsilon_z$ , de masse totale 1, qui dépend du point  $z$  intérieur au disque de rayon  $r$ . On va montrer que lorsque  $z$  tend vers un point  $re^{i\theta_0}$ , cette distribution de masses tend vers la distribution formée d'une masse  $+1$  placée au point  $re^{i\theta_0}$ . D'une façon précise, si l'on se donne un arc  $|\theta - \theta_0| \leq \tau_1$  du cercle de rayon  $r$ , contenant le point  $re^{i\theta_0}$ , la masse totale de la distribution  $\varepsilon_z$  portée par cet arc tend vers 1 lorsque le point  $z$  tend vers  $re^{i\theta_0}$ . Il revient au même de montrer que la masse totale de la distribution  $\varepsilon_z$  portée par l'arc complémentaire tend vers 0 lorsque  $z$  tend vers le point  $re^{i\theta_0}$  en restant intérieur au disque. Nous voulons donc prouver le :

LEMME. — *L'intégrale*

$$(4.3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| > \eta} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $re^{i\theta_0}$  en restant de module  $< r$ .

Démonstration du lemme : posons  $z = \rho e^{i\alpha}$ . Si  $|\alpha - \theta_0| \leq \frac{\eta}{2}$ , on a

$$|\alpha - \theta| \geq \frac{\eta}{2}$$

pour tout  $\theta$  satisfaisant à  $|\theta - \theta_0| > \eta$ . Donc, sous le signe d'intégration on a

$$|re^{i\theta} - z| \geq r \sin \frac{\eta}{2},$$

et par suite l'intégrale (4.3) est majorée par  $\frac{1}{r^2 \sin^2 \frac{\eta}{2}} (r^2 - \rho^2)$ . Ceci tend

bien vers 0 lorsque  $\rho$  tend vers  $r$ .

Ce lemme étant maintenant établi, nous pouvons démontrer la relation (4.2). On a, compte tenu de (2.1),

$$(4.4) \quad F(z) - f(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| \leq \eta} (f(\theta) - f(\theta_0)) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| > \eta} (f(\theta) - f(\theta_0)) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta.$$

Donnons-nous  $\varepsilon > 0$ . La première intégrale du second membre de (4.4) est, en valeur absolue, majorée par la borne supérieure de  $|f(\theta) - f(\theta_0)|$  quand  $|\theta - \theta_0| \leq \eta$ , puisque la masse totale de la distribution positive  $\varepsilon_r$  est égale à 1. Puisque  $f$  est continue, on peut choisir  $\eta$  de manière que la valeur absolue de la première intégrale soit  $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Ayant ainsi choisi  $\eta$ , nous pouvons majorer la valeur absolue de la deuxième intégrale du second membre de (4.4) par  $2Mm$ ,  $M$  désignant une borne supérieure de  $|f(\theta)|$ , et  $m$  désignant la valeur de l'intégrale (4.3). D'après le lemme précédent,  $m$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $re^{i\theta_0}$ . Donc dès que  $z$  sera assez voisin de  $re^{i\theta_0}$ , la valeur absolue de la seconde intégrale sera  $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ . On a alors

$$|F(z) - f(\theta_0)| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre (4.2).

Le théorème du n° 3 est ainsi entièrement établi, et la formule (4.1) explicite la solution du problème de Dirichlet.

### 5. CARACTÉRISATION DES FONCTIONS HARMONIQUES PAR LA PROPRIÉTÉ DE MOYENNE

On a vu (§ 3, n° 3) que toute fonction harmonique possède la propriété de moyennage. La réciproque est vraie :

**THÉORÈME.** *Toute fonction continue  $f$  dans un ouvert  $D$ , ayant la propriété de moyenne dans  $D$ , est harmonique dans  $D$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $f$  est harmonique au voisinage de chaque point de  $D$ ; pour cela nous allons montrer que si  $K$  est un disque fermé contenu dans  $D$ ,  $f$  est harmonique à l'intérieur de  $K$ . Considérons la restriction de  $f$  au bord du disque  $K$ ; d'après le théorème du n° 3, il existe une fonction  $F$  continue dans  $K$ , harmonique à l'intérieur de  $K$ , et qui coïncide avec  $f$  sur le bord de  $K$ . La différence  $F - f$  est nulle sur le bord de  $K$  et satisfait au principe du maximum à l'intérieur de  $K$ , puisqu'elle possède la propriété de moyenne. D'après le principe du maximum (cf. le lemme du n° 3),  $F - f$  est identiquement nulle dans  $K$ . Donc  $f$  coïncide, dans l'intérieur de  $K$ , avec la fonction harmonique  $F$ , et par suite  $f$  est bien harmonique à l'intérieur de  $K$ .

## 5. Fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes

### 1. DÉFINITION D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

Considérons  $n$  variables complexes  $z_k = x_k + iy_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). En raisonnant comme au chapitre II, § 2, n° 3, on voit que la différentielle d'une fonction continûment différentiable  $f$  s'écrit sous la forme

$$(1.1) \quad df = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \right).$$

Fixons toutes les variables sauf la variable  $z_k$ ; pour que la fonction partielle soit une fonction holomorphe de  $z_k$ , il faut et il suffit que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0$ . S'il en est ainsi pour chacune des variables  $z_k$ , la différentielle  $df$  est combinaison linéaire des  $dz_k$ . Réciproquement, si  $df$  est combinaison linéaire des  $dz_k$ , la fonction  $f$  est holomorphe séparément par rapport à chaque variable  $z_k$ .

*Définition.* Une fonction  $f(z_1, \dots, z_n)$  définie dans un ouvert  $D$  de l'espace  $\mathbb{C}^n$  des  $n$  variables  $z_k$ , est dite *holomorphe* dans  $D$  si elle est continûment différentiable et si en outre sa différentielle  $df$  est égale à

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k.$$

Il est clair qu'une fonction analytique des variables complexes  $z_k$  est holomorphe.

**THÉORÈME.** *Une fonction continue dans un ouvert D, holomorphe séparément par rapport à chaque variable complexe  $z_k$ , est holomorphe dans D et même analytique dans D.*

La démonstration de ce théorème va faire l'objet des deux numéros suivants. Ce théorème entraînera notamment que toute fonction continue, holomorphe séparément par rapport à chaque variable  $z_k$ , est continûment différentiable et même indéfiniment différentiable. Il entraînera d'autre part l'équivalence des notions d'holomorphicité et d'analyticité pour les fonctions de plusieurs variables complexes.

## 2. FORMULE INTÉGRALE DE CAUCHY

Considérons d'abord le cas de deux variables complexes  $z_1$  et  $z_2$ .

**PROPOSITION 2. 1.** *Si  $f(z_1, z_2)$  est continue dans le produit des disques*

$$(2. 1) \quad |z_1| < \rho_1, \quad |z_2| < \rho_2,$$

*et holomorphe séparément par rapport à  $z_1$  et à  $z_2$  dans (2. 1), on a, lorsque*

$$(2. 2) \quad |z_k| < r_k < \rho_k \quad (k = 1, 2),$$

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)},$$

*l'intégrale double étant prise sur le produit des cercles  $|\zeta_1| = r_1$  et  $|\zeta_2| = r_2$ , chacun étant parcouru dans le sens direct.*

*Démonstration.* Fixons  $z_2$  dans le disque ouvert  $|z_2| < r_2$ . La fonction  $f(z_1, z_2)$  est holomorphe en  $z_1$  dans le disque  $|z_1| < \rho_1$ . On peut donc lui appliquer la formule intégrale de Cauchy (chapitre II, § 2, n° 5) :

$$(2. 3) \quad f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \quad \text{pour } |z_1| < r_1.$$

Fixons maintenant  $\zeta_1$  tel que  $|\zeta_1| = r_1$ . La fonction  $f(\zeta_1, z_2)$  est holomorphe en  $z_2$  pour  $|z_2| < \rho_2$ . On a donc de même

$$(2. 4) \quad f(\zeta_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2|=r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2 \quad \text{pour } |z_2| < r_2.$$

Sous le signe d'intégration de (2. 3), remplaçons  $f(\zeta_1, z_2)$  par sa valeur tirée de (2. 4). Puisque la fonction  $f(\zeta_1, \zeta_2)$  est continue, on obtient précisément la formule (2. 2).

*Remarque* (due à Hartogs). Soit  $f(z_1, z_2)$  une fonction définie et continue dans la réunion des deux ouverts (où  $\varepsilon > 0$  est très petit) :

$$(A) \quad |z_1| < \rho_1, \quad |z_2| < \varepsilon,$$

$$(B) \quad \rho_1 - \varepsilon < |z_1| < \rho_1, \quad |z_2| < \rho_2.$$

Supposons que, dans (A),  $f$  soit une fonction holomorphe de  $z_1$ , et que, dans (B),  $f$  soit une fonction holomorphe de  $z_2$ . Alors  $f$  se prolonge en une fonction holomorphe des variables  $z_1$  et  $z_2$  dans l'ouvert (2. 1), et cette fonction prolongée satisfait à la formule intégrale (2. 2).

*Indications sur la démonstration.* Choisissons arbitrairement  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $r_1 < \rho_1$ ,  $r_2 < \rho_2$ , mais assez grands pour que  $\varepsilon < r_2$ ,  $r_1 > \rho_1 - \varepsilon$ . On va montrer que  $f$  se prolonge en une fonction, notée encore  $f(z_1, z_2)$ , holomorphe dans l'ouvert

$$(2. 5) \quad |z_1| < r_1, \quad |z_2| < r_2,$$

et qui, dans cet ouvert, satisfait à (2. 2). D'abord, la relation (2. 3) a lieu pour  $|z_1| < r_1$ ,  $|z_2| < \varepsilon$  parce que  $f$  est holomorphe en  $z_1$  dans (A); ensuite, si  $|z_1| = r_1$ , la relation (2. 4) a lieu pour  $|z_2| < r_2$  parce que  $f$  est holomorphe en  $z_2$  dans (B). Donc (2. 2) a lieu pour  $|z_1| < r_1$ ,  $|z_2| < \varepsilon$ . Or le second membre de (2. 2) est une fonction holomorphe de  $z_1$  et  $z_2$  dans (2. 5); si on note  $f(z_1, z_2)$  la fonction ainsi prolongée, elle satisfait à (2. 2) dans (2. 5).  
C.Q.F.D.

La proposition 2. 1 possède un analogue pour les fonctions de  $n$  variables complexes. Dans ce cas la formule intégrale (2. 1) est à remplacer par

$$f(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \dots \int \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}.$$

### 3. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

**PROPOSITION 3. 1.** *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 2. 1, la fonction  $f$  est, dans l'ouvert (2. 1), développable en série entière double*

$$(3. 1) \quad f(z_1, z_2) = \sum_{p, q \geq 0} a_{p, q}(z_1)^p (z_2)^q.$$

La démonstration va être analogue à celle donnée dans le cas d'une variable complexe (cf. chapitre II, § 2, n° 6, théorème 3).

On sait déjà que si le développement en série entière existe, il est *unique* car c'est nécessairement le développement de Taylor de  $f$  à l'origine. Il suffit donc, étant donnés  $r'_1$  et  $r'_2$  tels que

$$r'_1 < \rho_1, \quad r'_2 < \rho_2,$$

de trouver une série entière double qui converge normalement vers  $f(z_1, z_2)$  dans le produit des disques

$$|z_1| \leq r'_1, \quad |z_2| \leq r'_2.$$

Choisissons  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $r'_1 < r_1 < \rho_1$ ,  $r'_2 < r_2 < \rho_2$ ; et appliquons la formule intégrale (2. 2) pour  $|z_1| \leq r'_1$ ,  $|z_2| \leq r'_2$ . On a

$$(3. 2) \quad \frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \sum_{p, q \geq 0} \frac{(z_1)^p (z_2)^q}{(\zeta_1)^{p+1} (\zeta_2)^{q+1}},$$

et cette série converge normalement pour  $|z_i| \leq r'_i$ ,  $|\zeta_i| = r_i$  ( $i = 1, 2$ ). Sous le signe d'intégration du second membre de (2. 2), remplaçons  $\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}$  par sa valeur tirée de (3. 2). En vertu de la convergence normale on peut intégrer terme à terme, et l'on obtient précisément (3. 1), où les coefficients  $a_{p, q}$  sont donnés par la formule intégrale

$$(3. 3) \quad a_{p, q} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1)^{p+1} (\zeta_2)^{q+1}} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

La proposition 3. 1 est ainsi démontrée.

On a une proposition analogue pour  $n$  variables complexes.

Il est clair que le théorème énoncé à la fin du n° 1 résulte de la proposition 3. 1.

*Remarque.* On peut démontrer qu'une fonction  $f(z_1, \dots, z_n)$ , holomorphe séparément par rapport à chaque variable dans un ouvert  $D$ , est continue dans  $D$ , et par suite holomorphe. La démonstration est délicate et ne sera pas donnée ici.

#### 4. CALCUL DES COEFFICIENTS DU DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

Comme dans le cas d'une variable, les coefficients  $a_{p, q}$  peuvent être exprimés par des intégrales portant sur la fonction  $f$ . Il suffit pour cela, dans la relation (3. 1), de remplacer  $z_1$  par  $r_1 e^{i\theta_1}$  et  $z_2$  par  $r_2 e^{i\theta_2}$ ; en intégrant terme à terme on obtient :

$$(4. 1) \quad a_{p, q} (r_1)^p (r_2)^q = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) e^{-i(p\theta_1 + q\theta_2)} d\theta_1 d\theta_2$$

On déduit de là les inégalités de Cauchy :

$$(4. 2) \quad |a_{p, q}| \leq \frac{M(r_1, r_2)}{(r_1)^p (r_2)^q},$$

où  $M(r_1, r_2)$  désigne la borne supérieure de  $|f(z_1, z_2)|$  pour  $|z_1| = r_1$ ,  $|z_2| = r_2$ , ou, ce qui revient au même, pour  $|z_1| \leq r_1$ ,  $|z_2| \leq r_2$ .

On laisse au lecteur le soin d'énoncer le théorème analogue au théorème de Liouville, ainsi que le principe du maximum.

### 5. COMPOSITION DES FONCTIONS HOLOMORPHES

PROPOSITION 5. 1. Soit  $f(z_1, \dots, z_n)$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}^n$ . Soient

$$g_1, \dots, g_n$$

des fonctions holomorphes dans un ouvert  $D'$  de  $\mathbb{C}^p$ , telles que leurs valeurs en chaque point de  $D'$  soient les coordonnées d'un point de  $D$ .

$$(t_1, \dots, t_p) \rightarrow f(g_1(t_1, \dots, t_p), \dots, g_n(t_1, \dots, t_p))$$

est une fonction holomorphe de  $t_1, \dots, t_p$  dans l'ouvert  $D'$ .

*Démonstration.* On pourrait utiliser la méthode de substitution dans les séries entières convergentes. Comme nous n'avons pas exposé en détail cette question dans le cas de plusieurs variables, nous préférons donner ici une méthode dont le principe est entièrement différent.

Par hypothèse, puisque  $f$  est holomorphe on a

$$(5. 1) \quad df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k.$$

Puisque les fonctions  $g_k$  sont holomorphes, on a

$$(5. 2) \quad dz_k = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g_k}{\partial t_j} dt_j.$$

On trouve la différentielle de la fonction composée  $f \circ g$  en substituant aux différentielles  $dz_k$  dans (5. 1), leurs valeurs tirées de (5. 2); donc  $d(f \circ g)$  est une combinaison linéaire des  $dt_j$ , et par suite  $f \circ g$  est une fonction holomorphe des  $t_j$ .

### 6. THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

PROPOSITION 6. 1. Soient  $f_j(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p)$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), des fonctions holomorphes au voisinage d'un point  $x_j = a_j$ ,  $z_k = c_k$ . Supposons que le déterminant fonctionnel  $\det \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right)$  soit  $\neq 0$  au point considéré. Alors les équations

$$(6. 1) \quad y_j = f_j(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p) \quad (j = 1, \dots, n)$$



peuvent se résoudre lorsque les  $x_j$  sont assez voisins des  $a_j$ , les  $z_k$  sont assez voisins des  $c_k$ , et les  $y_j$  sont assez voisins des  $b_j = f_j(a_1, \dots, a_n; c_1, \dots, c_p)$ , de la manière suivante :

$$(6. 2) \quad x_j = g_j(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_p);$$

où les  $g_j$  sont des fonctions holomorphes au voisinage du point  $(b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_p)$ .

*Démonstration.* On va se ramener au théorème classique des fonctions implicites de variables réelles. Posons

$$x_j = x'_j + ix''_j, \quad y_j = y'_j + iy''_j,$$

$x'_j, x''_j, y'_j$  et  $y''_j$  étant réels. Le produit extérieur  $dx_j \wedge d\bar{x}_j$  est égal à

$$(dx'_j + idx''_j) \wedge (dx'_j - idx''_j) = \dots - 2idx'_j \wedge dx''_j.$$

Ainsi on a

$$(6. 3) \quad dx_j \wedge d\bar{x}_j = -2idx'_j \wedge dx''_j, \quad \text{et de même} \quad dy_j \wedge d\bar{y}_j = -2idy'_j \wedge dy''_j.$$

Or, lorsqu'on fixe  $z_1, \dots, z_p$ , on a

$$\begin{aligned} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n &= \det \left( \frac{\partial f_j}{\partial x'_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \\ d\bar{y}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{y}_n &= \det \left( \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial \bar{x}'_j} \right) d\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}_n, \end{aligned}$$

d'où par multiplication

$$dy_1 \wedge d\bar{y}_1 \wedge \dots \wedge dy_n \wedge d\bar{y}_n = \left| \det \left( \frac{\partial f_j}{\partial x'_j} \right) \right|^2 dx_1 \wedge d\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge d\bar{x}_n.$$

Compte tenu de (6. 3), cela signifie que le déterminant fonctionnel de  $y'_1, y''_1, \dots, y'_n, y''_n$  par rapport à  $x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n$  est égal à

$$\left| \det \left( \frac{\partial f_j}{\partial x'_j} \right) \right|^2,$$

qui est  $\neq 0$  au point  $(a_1, \dots, a_n; c_1, \dots, c_p)$  par hypothèse. Appliquons le théorème des fonctions implicites :  $x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n$  s'expriment (localement) comme fonctions continûment différentiables de  $y'_1, y''_1, \dots, y'_n, y''_n$  et des parties réelles et imaginaires de  $z_1, \dots, z_p$ . Or le système d'équations linéaires

$$dy_j = \sum_{j'} \frac{\partial f_j}{\partial x_{j'}} dx_{j'} + \sum_k \frac{\partial f_j}{\partial z_k} dz_k$$

montre que les  $dx_{j'}$  sont des combinaisons linéaires des  $dy_j$  et des  $dz_k$ . Donc  $x_1, \dots, x_n$  sont, en fait, des fonctions holomorphes des  $y_i$  et des  $z_k$ .

C.Q.F.D.

## Exercices

1. Montrer que, si  $f(z)$  est holomorphe dans un ouvert  $D$ , on a, pour tout  $z \in D$ ,

$$(i) \quad \Delta |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2,$$

$$(ii) \quad \Delta \log(1 + |f(z)|^2) = 4 |f'(z)|^2 / (1 + |f(z)|^2)^2,$$

$\Delta$  désignant le laplacien défini au § 3, n° 1.

2. (i) Soit  $g(z)$  une fonction holomorphe dans le disque  $|z| < R$ . Montrer que, si  $0 \leq r < R$ , et si  $g(z)$  n'a pas de zéro dans le disque fermé  $|z| \leq r$ , on a la relation suivante :

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

(ii) Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \log |re^{i\theta} - re^{i\theta}| d\theta$$

existe et que sa valeur est égale à  $2\pi \log r$  ( $r, t$  réels,  $r > 0$ ).

En déduire que, si  $f(z)$  est une fonction méromorphe et  $\neq 0$  dans le disque  $|z| < R$ , et si  $0 < r < R$ , l'intégrale  $\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$  est convergente.

(iii) Soient  $a_1, a_2, \dots, a_p$  les zéros et  $b_1, b_2, \dots, b_q$  les pôles de la fonction  $f(z)$  considérée dans (ii), contenus dans le disque pointé  $0 < |z| \leq r$  (chacun d'eux étant compté autant de fois que l'exige son ordre de multiplicité), et soit

$$f(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

le développement de Laurent de  $f$  à l'origine ( $n$  est donc un entier  $\geq 0$ ). Montrer que l'on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log |c_n| - \sum_{j=1}^p \log |a_j| + \sum_{k=1}^q \log |b_k| + (n + p - q) \log r.$$

(Considérer la fonction

$$g(z) = f(z) \left( \frac{r}{z} \right)^n \prod_{1 \leq j \leq p} \frac{r^2 - \bar{a}_j z}{r(z - a_j)} \prod_{1 \leq k \leq q} \frac{r(z - b_k)}{r^2 - \bar{b}_k z}$$

et montrer qu'elle est holomorphe et n'a pas de zéro dans un ouvert contenant le disque fermé  $|z| \leq r$ , et que  $|g(z)| = |f(z)|$  si  $|z| = r$ .)

3. Les fonctions harmoniques considérées dans ce problème sont toutes supposées à valeurs réelles.

(i) Si  $f(z)$  est harmonique dans le disque  $|z| < R$ , et si  $f(z) \geq 0$  partout dans le disque, montrer que l'on a les inégalités

$$\frac{R - |z|}{R + |z|} f(0) \leq f(z) \leq \frac{R + |z|}{R - |z|} f(0)$$

pour tout  $|z| < R$ . (Utiliser la formule de Poisson et remarquer que le noyau de Poisson satisfait aux inégalités

$$\frac{r - |z|}{r + |z|} \leq \frac{r^2 - |z|^2}{r^2 - |z|^2} \leq \frac{r + |z|}{r - |z|} \quad (\text{pour } |z| < r.)$$

(ii) En déduire que, si  $f(z)$  est harmonique et  $\geq 0$  dans un disque  $D(a, r)$  de centre  $a$  et de rayon  $r$ , on a

$$\frac{1}{3} f(a) \leq f(z) \leq 3 f(a)$$

pour tout  $z$  dans le disque  $D(a, r/2)$ .

(iii) Soit  $f(z)$  une fonction harmonique et  $\geq 0$  dans un ouvert connexe  $D$  du plan  $\mathbb{C}$ , et soit  $K$  un compact contenu dans  $D$ . Montrer qu'il existe une constante  $M$ , ne dépendant que de  $D$  et  $K$ , telle que l'on ait

$$f(z_1) \leq M f(z_2)$$

quels que soient  $z_1, z_2$  dans  $K$ . (Montrer qu'il existe un nombre fini de disques fermés  $D_n$  satisfaisant aux conditions suivantes :

$$D \supset \bigcup_n D_n \supset K,$$

et, pour deux quelconques d'entre eux, soient  $D_p$  et  $D_q$ , il existe une suite  $D_{n_1}, \dots, D_{n_k}$  telle que  $D_{n_1} = D_p$ ,  $D_{n_k} = D_q$ , et  $D_{n_j} \cap D_{n_{j+1}} \neq \emptyset$  pour  $j = 2, 3, \dots, k$ . Appliquer (ii) à chacun de ces disques.)

(iv) Soit  $\{f_n(z)\}$  une suite de fonctions harmoniques dans un ouvert connexe  $D$ , monotone croissante (au sens large) :

$$f_n(z) \leq f_{n+1}(z) \text{ pour tout } z \in D \text{ et } n = 1, 2, \dots$$

S'il existe un  $a \in D$  tel que  $\sup_n |f_n(a)| < \infty$ , montrer que la suite  $f_n(z)$  converge, uniformément sur tout compact dans  $D$ , vers une fonction harmonique. (Remarquer l'équivalence de la convergence de la suite  $(f_n(z))$  et celle de la série  $\sum (f_{n+1}(z) - f_n(z))$  et appliquer (iii).)

4. *Fonctions sous-harmoniques.* Une fonction continue et à valeurs réelles définie dans un ouvert  $D$  du plan  $\mathbb{C}$  est dite *sous-harmonique* si, quel que soit  $a \in D$ , on a

$$(SH) \quad f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

pour  $r > 0$  assez petit.

(i) Si  $f(z)$  est holomorphe dans un ouvert  $D$ , montrer que  $|f(z)|^p$  est sous-harmonique dans  $D$ , pour  $p \geq 0$ .

(ii) Si  $f_\nu(z)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , sont sous-harmoniques dans  $D$ , alors les fonctions suivantes sont aussi sous-harmoniques dans  $D$  :

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu f_\nu(z), \quad a_\nu \geq 0; \quad \sup_{1 \leq \nu \leq n} f_\nu(z).$$

(iii) Si une suite de fonctions sous-harmoniques  $f_n(z)$  dans  $D$  converge uniformément sur tout compact dans  $D$ , la fonction limite est aussi sous-harmonique.

(iv) Montrer que le principe du maximum s'applique aux fonctions sous-harmoniques; de façon précise :

(1) Soit  $f$  sous-harmonique dans un ouvert  $D$ . Si  $f$  possède un maximum relatif en un point  $a \in D$  (i.e.  $f(z) \leq f(a)$  pour tout  $z$  assez voisin de  $a$ ), alors  $f$  est constante au voisinage de  $a$ .

(2) Soient  $D$  un ouvert borné et connexe du plan,  $f$  une fonction sous-harmonique dans  $D$ , et continue dans  $\bar{D}$ . Soit  $M$  la borne supérieure de  $f(z)$  quand  $z$  parcourt la frontière de  $D$ . Alors

(a)  $f(z) \leq M$  pour tout  $z \in D$ ;

(b) si  $f(a) = M$  en un point  $a \in D$ ,  $f$  est constante.

(v) Soit  $\Gamma$  le bord orienté d'un compact  $K$  contenu dans un ouvert  $D$ . Montrer que, si  $u, v$  sont deux fonctions (à valeurs réelles) ayant des dérivées secondes continues, on a

$$\iint_K (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \int_\Gamma \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy.$$

(Utiliser la formule de Green-Riemann citée au chapitre II, § 1, n° 9; prendre d'abord  $P = -v \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $Q = v \frac{\partial u}{\partial x}$ , puis échanger  $u$  et  $v$ .) En déduire que, si  $f(z)$  est une fonction définie dans  $D$ , ayant des dérivées seconde continues, et si  $a \in D$ , on a

$$\iint_{|z-a| \leq r} (\Delta f)(z) dx dy = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(a + re^{i\theta}) r d\theta,$$

pour  $r > 0$  assez petit. (Prendre dans l'égalité ci-dessus,  $u = f$ ,  $v = 1$ .)  
En déduire que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta = f(a) + \int_0^{\rho} \frac{dr}{2\pi r} \int_{|z|=r} (\Delta f)(z) dx dy$$

pour  $\rho > 0$  assez petit, et montrer que  $\Delta f(z) \geq 0$ , pour  $z \in D$ , est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $f(z)$  ayant des dérivées secondes continues soit sous-harmonique dans  $D$ .

*Exemple.* Montrer que, si  $f(z)$  est holomorphe dans un ouvert  $D$ , la fonction  $\log(1 + |f(z)|^2)$  est sous-harmonique dans  $D$ .

5. Soit  $f(z)$  une fonction sous-harmonique dans le disque  $|z| < R$ . Montrer que, si  $0 < r_1 < R$ , et si  $g(z)$  est la solution du problème de Dirichlet dans le disque  $|z| \leq r_1$ , telle que  $g(r_1 e^{i\theta}) = f(r_1 e^{i\theta})$ , on a

$$g(re^{i\theta}) \geq f(re^{i\theta})$$

pour  $0 \leq r < r_1$ . En déduire que la fonction

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta$$

est une fonction continue croissante (au sens large) de  $r$  dans  $0 \leq r < R$ .

6. Montrer que si  $f(z)$  est holomorphe dans le disque  $|z| < R$ ,  $\alpha$  réel  $> 0$ , la fonction

$$I_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\alpha d\theta$$

est continue croissante (au sens large) dans  $0 \leq r < R$ .

# Convergence des suites de fonctions holomorphes ou méromorphes; séries, produits infinis; familles normales

Dans ce chapitre on considère exclusivement des fonctions d'une variable complexe. Cependant un grand nombre parmi les considérations qui suivent pourraient s'étendre au cas de plusieurs variables complexes.

## 1. Topologie de l'espace $\mathcal{C}(D)$

### 1. CONVERGENCE UNIFORME SUR TOUT COMPACT

Soit  $D$  un ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$ . On notera constamment  $\mathcal{C}(D)$  l'espace vectoriel des fonctions *continues* (à valeurs complexes) dans l'ouvert  $D$ . On notera  $\mathcal{H}(D)$  l'espace vectoriel des fonctions *holomorphes* dans  $D$ .

*Définition.* On dit qu'une suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{C}(D)$  *converge uniformément sur tout compact* si, quel que soit le compact  $K \subset D$ , la suite des restrictions  $f_n|_K$  converge uniformément. Cette définition s'applique en particulier au cas des fonctions de l'espace  $\mathcal{H}(D)$ .

On sait que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est une fonction continue. Donc, si la suite des fonctions continues  $f_n$  converge uniformément sur tout compact de  $D$ , la fonction limite  $f$  est telle que sa restriction  $f|_K$  à tout compact  $K \subset D$  soit continue. Comme tout point de  $D$  possède un voisinage compact contenu dans  $D$ , il s'ensuit que  $f$  est continue.

*Définition.* On dit qu'une série  $\sum_n f_n$  de fonctions  $f_n \in \mathcal{C}(D)$  *converge normalement sur tout compact* de  $D$ , si, pour tout compact  $K \subset D$ , la série des restric-

tions  $f_n$   $K$  converge normalement. Autrement dit, sur tout compact  $K$ , la série donnée doit être majorée par une série convergente à termes constants positifs. Il est clair que si une série converge normalement sur tout compact, les sommes partielles de cette série forment une suite qui converge uniformément sur tout compact.

**PROPOSITION 1. 1.** *Pour qu'une suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{C}(D)$  converge uniformément sur tout compact de  $D$ , il suffit (et il faut) que, pour tout disque compact  $\Sigma \subset D$ , la suite des restrictions  $f_n|_{\Sigma}$  converge uniformément. Énoncé analogue pour le cas d'une série normalement convergente.*

En effet, soit  $K$  un compact quelconque contenu dans  $D$ . On peut recouvrir  $K$  par les intérieurs d'un nombre fini de disques compacts contenus dans  $D$ . La proposition en résulte aussitôt.

## 2. THÉORÈMES FONDAMENTAUX SUR LA CONVERGENCE DES FONCTIONS HOLOMORPHES

**THÉORÈME 1.** *Si une suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{H}(D)$  converge uniformément sur tout compact, la fonction limite  $f$  est holomorphe dans  $D$ .*

*Démonstration.* On vient de voir que  $f$  est continue dans  $D$ . Pour montrer que  $f$  est holomorphe il suffit, d'après le théorème de Morera (chapitre II, § 2, n° 7, théorème 4) de montrer que la forme différentielle  $f(z) dz$  est fermée. Pour cela il suffit de montrer que  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  chaque fois que  $\gamma$  est le bord d'un rectangle contenu dans  $D$  (cf. chapitre II, § 1, proposition 4. 1). Or sur le bord du rectangle,  $f$  est limite uniforme de la suite des  $f_n$ , et on a donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_n \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0,$$

ce qui démontre le théorème 1.

**COROLLAIRE.** *La somme d'une série de fonctions holomorphes qui converge normalement sur tout compact de  $D$ , est une fonction holomorphe dans  $D$ .*

**THÉORÈME 2.** *Si une suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{H}(D)$  converge vers  $f \in \mathcal{H}(D)$  uniformément sur tout compact, alors la suite des dérivées  $f'_n$  converge vers la dérivée  $f'$  uniformément sur tout compact.*

*Démonstration.* D'après la proposition 1. 1, il suffit de montrer que les  $f'_n$  convergent vers  $f'$  uniformément sur tout disque compact contenu dans  $D$ . Soit  $\Sigma$  un tel disque,  $r$  son rayon, et prenons pour origine  $o$  le centre de  $\Sigma$ . Il existe  $r_0 > r$  tel que le disque fermé de centre  $o$  et de rayon  $r_0$  soit contenu

dans D. Ainsi les  $f_n$  sont holomorphes pour  $|z| < r_0 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  et assez petit) et convergent vers  $f$  uniformément pour  $|z| \leq r_0$ .

Montrons que les dérivées  $f'_n$  convergent uniformément vers  $f'$  pour  $|z| \leq r$ . Cela va résulter aussitôt du lemme suivant :

**LEMME.** Si  $g(z)$  est holomorphe pour  $|z| < r_0 + \varepsilon$ , et si  $|g(z)| \leq M$  pour  $|z| \leq r_0$ , alors on a

$$(2.1) \quad |g'(z)| \leq M \frac{r_0}{(r_0 - r)^2} \quad \text{pour } |z| \leq r < r_0.$$

*Démonstration du lemme.* On a le développement convergent

$$(2.2) \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{pour } |z| \leq r_0.$$

D'après les inégalités de Cauchy, on a  $|a_n| \leq \frac{M}{(r_0)^n}$ . D'autre part, en différenciant terme à terme, on a

$$(2.3) \quad g'(z) = \sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}.$$

Donc, pour  $|z| \leq r < r_0$ , on a

$$(2.4) \quad |g'(z)| \leq \frac{M}{r_0} \sum_{n \geq 0} \frac{n r^{n-1}}{(r_0)^{n-1}}.$$

Calculons la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}$ ;  $nt^{n-1}$  est la dérivée de  $t^n$ , donc

$\sum_n nt^{n-1}$  est la dérivée de  $\sum t^n = \frac{1}{1-t}$ , et par suite

$$\sum_{n \geq 0} n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2}.$$

D'où, en portant dans (2.4), l'inégalité

$$|g'(z)| \leq \frac{M}{r_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2},$$

ce qui démontre le lemme.

*Remarque.* On peut donner une autre démonstration du théorème 2 en observant que la formule intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-z}$$



(où  $\gamma$  désigne le bord d'un disque concentrique à  $\Sigma$  et de rayon un peu plus grand) donne, par différentiation sous le signe d'intégration par rapport à  $z$ ,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)^2}.$$

On a donc

$$f'(z) = \lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(t) dt}{(t-z)^2} = \lim_n f'_n(z).$$

La limite a lieu uniformément quand  $z \in \Sigma$ .

**PROPOSITION 2. 1.** *Soit  $D$  un ouvert connexe. Si une suite de fonctions holomorphes  $f_n \in \mathcal{H}(D)$  converge uniformément sur tout compact de  $D$ , et si chaque  $f_n$  est  $\neq 0$  en tout point de  $D$ , alors la fonction limite  $f$  est  $\neq 0$  en tout point de  $D$ , sauf si elle est identiquement nulle.*

*Démonstration.* Supposons  $f$  non identiquement nulle. Alors les zéros de  $f$  (qui est holomorphe d'après le théorème 1) sont isolés puisque  $D$  est connexe. Supposons que  $f$  s'annule en  $z_0$ ; d'après la proposition 4. 1. du chapitre III, § 5, l'ordre de multiplicité de ce zéro serait égal à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)},$$

étendue à un cercle  $\gamma$  de petit rayon et de centre  $z_0$ . D'après le théorème 2, cette intégrale est limite des intégrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_n(z) dz}{f_n(z)},$$

et ces intégrales sont nulles puisque la fonction holomorphe  $f_n$  ne s'annule pas. On arrive ainsi à une contradiction, et ceci prouve la proposition.

*Définition.* On dit qu'une fonction définie dans un ouvert  $D$  est *univalente* si l'application qu'elle définit est injective, autrement dit si elle prend toujours des valeurs distinctes en des points distincts.

**PROPOSITION 2. 2.** *Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Si une suite de fonctions holomorphes  $f_n \in \mathcal{H}(D)$  converge uniformément sur tout compact de  $D$ , et si chaque  $f_n$  est univalente, la fonction limite  $f$  est univalente si elle n'est pas constante.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux points distincts de  $D$  tels que  $f(z_1) = f(z_2) = a$ . Considérons deux disques ouverts  $S_1$  et  $S_2$ , de centres  $z_1$  et  $z_2$ , et de rayons assez petits pour que

$S_1$  et  $S_2$  soient disjoints et contenus dans  $D$ . D'après la proposition 2. 1,  $f_n$  prend la valeur  $a$  dans  $S_1$  et dans  $S_2$ , pour  $n$  assez grand, ce qui contredit l'univalence de  $f_n$ .

### 3. TOPOLOGIE DE L'ESPACE $\mathcal{C}(D)$

On a déjà défini ce que l'on entend par suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{C}(D)$  qui converge uniformément sur tout compact. On va maintenant, d'une façon plus précise, définir une topologie sur l'espace vectoriel  $\mathcal{C}(D)$ . Sur le sous-espace vectoriel  $\mathcal{H}(D)$  on considérera la topologie induite.

Pour tout couple  $(K, \varepsilon)$  formé d'un compact  $K \subset D$  et d'un nombre  $\varepsilon > 0$ , considérons le sous-ensemble  $V(K, \varepsilon)$  de  $\mathcal{C}(D)$  défini par

$$(3. 1) \quad f \in V(K, \varepsilon) \iff |f(x)| \leq \varepsilon \text{ pour } x \in K.$$

Pour qu'une suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{C}(D)$  converge vers  $f$  uniformément sur tout compact, il faut et il suffit que, quels que soient  $K$  et  $\varepsilon$ , on ait :

$$f - f_n \in V(K, \varepsilon) \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Ceci exprime que la suite des  $f_n \in \mathcal{C}(D)$  a pour limite le point  $f$  dans la topologie (s'il en existe une) pour laquelle les ensembles  $V(K, \varepsilon)$  forment un système fondamental de voisinages de 0 (les voisinages d'un point  $f$  étant alors définis en effectuant la translation  $f$  sur les voisinages de 0).

**PROPOSITION 3. 1.** *Il existe effectivement sur  $\mathcal{C}(D)$  une topologie (invariante par translation) dans laquelle les ensembles  $V(K, \varepsilon)$  forment un système fondamental de voisinages de 0. Cette topologie est unique et peut être définie par une distance invariante par translation.*

*Démonstration.* L'unicité de la topologie est évidente, parce qu'on connaît un système fondamental de voisinages de 0, donc, par translation, un système fondamental de voisinages de chaque point de l'espace  $\mathcal{C}(D)$ . Il reste à trouver une distance invariante par translation et telle que les  $V(K, \varepsilon)$  forment un système fondamental de voisinages de 0 dans la topologie définie par cette distance.

Introduisons d'abord une notion : on appelle suite exhaustive de compacts, une suite croissante de compacts  $K_i \subset D$  (on a donc  $K_i \subset K_{i+1}$ ) telle que tout compact  $K$  contenu dans  $D$  soit contenu dans l'un des  $K_i$ .

**LEMME.** *Il existe dans  $D$  une telle suite exhaustive de compacts.*

En effet, considérons les disques compacts contenus dans  $D$  dont le centre a des coordonnées rationnelles et dont le rayon est rationnel. Ils forment

un ensemble *dénombrable*, que l'on peut ranger en une suite  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ . Posons

$$K_i = \bigcup_{n \leq i} D_n,$$

et montrons que les compacts  $K_i$  forment une suite exhaustive. Les intérieurs des disques  $D_n$  forment un recouvrement ouvert de  $D$ , et par conséquent tout compact  $K$  contenu dans  $D$  est contenu dans un  $K_i$ .

Supposons désormais choisie une suite exhaustive de compacts  $K_i$ , et posons, pour chaque  $f \in \mathcal{C}(D)$ ,

$$(3.2) \quad M_i(f) = \sup_{z \in K_i} |f(z)|,$$

$$(3.3) \quad d(f) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \inf(1, M_i(f)).$$

$d(f)$  est fini, parce que la série du second membre est majorée par la série géométrique  $\sum_{i \geq 1} 2^{-i}$ . On va prouver que  $d(f)$  possède les propriétés suivantes :

$$(3.4) \quad d(f) = 0 \iff f = 0,$$

$$(3.5) \quad d(f + g) \leq d(f) + d(g),$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} 2^{-i} \inf(1, M_i(f)) \leq d(f), \\ d(f) \leq M_i(f) + 2^{-i}. \end{cases}$$

Prouvons (3. 4). Il est clair que, si  $f$  est identiquement nulle,  $d(f) = 0$ ; réciproquement  $d(f) = 0$  entraîne, d'après (3. 3),  $M_i(f) = 0$  quel que soit  $i$ , donc la restriction de  $f$  à chaque compact  $K_i$  est nulle et par suite  $f$  est identiquement nulle.

Prouvons (3. 5) : il est évident que

$$M_i(f + g) \leq M_i(f) + M_i(g),$$

d'où l'on déduit facilement

$$\inf(1, M_i(f + g)) \leq \inf(1, M_i(f)) + \inf(1, M_i(g)),$$

ce qui, par sommation, entraîne (3. 5).

Les relations (3. 4) et (3. 5) montrent que si l'on définit la distance de  $f$  et  $g$  comme étant égale à  $d(f - g)$ , cette distance est une *métrique* satisfaisant à l'inégalité du triangle; cette métrique est *invariante par translation*. Elle définit sur l'espace  $\mathcal{C}(D)$  une topologie séparée, invariante par translation.

Prouvons maintenant les inégalités (3. 6). La première résulte évidemment de la définition (3. 3). D'autre part, si  $i$  est un entier  $\geq 1$ , on a

$$M_j(f) \leq M_i(f)$$

pour  $j \leq i$ , et par suite (3. 3) entraîne

$$d(f) \leq \sum_{j \leq i} 2^{-j} M_i(f) + \sum_{j > i} 2^{-j},$$

d'où (3. 6).

Pour achever la démonstration de la proposition (3. 1), il reste à prouver que les ensembles  $V(K, \varepsilon)$  forment un système fondamental de voisinages de 0 dans la topologie définie par la distance ci-dessus.

1) tout ensemble  $V(K, \varepsilon)$  est un voisinage de 0 : en effet,  $K$  et  $\varepsilon$  étant donnés, avec  $\varepsilon < 1$ , soit  $i$  tel que  $K \subset K_i$ . Alors la relation  $d(f) \leq 2^{-i\varepsilon}$  entraîne  $f \in V(K, \varepsilon)$ , à cause de la première inégalité (3. 6).

2) tout voisinage de 0 de la forme  $d(f) \leq \varepsilon$  contient un ensemble de la forme  $V(K, \varepsilon')$ . En effet,  $\varepsilon$  étant donné, choisissons l'entier  $i$  de façon que  $2^{-i} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ; alors  $f \in V\left(K_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  entraîne  $d(f) \leq \varepsilon$ , en vertu de la deuxième inégalité (3. 6).

La démonstration de la proposition 3. 1 est ainsi achevée.

*Remarque.* On peut appliquer à l'espace  $\mathcal{C}(D)$  et à son sous-espace  $\mathcal{H}(D)$  les propriétés connues des espaces métriques, ou plus exactement des espaces topologiques métrisables. Par exemple, pour qu'un sous-ensemble  $A$  d'un espace métrisable  $E$  soit *fermé*, il faut et il suffit que chaque point de  $E$  qui est limite d'une suite de points de  $A$  appartienne à  $A$ . De même, pour qu'une application  $f$  de  $E$  dans un espace métrisable  $E'$  soit *continue* en un point  $x \in E$ , il faut et il suffit que, pour toute suite de points  $x_n \in E$  ayant  $x$  pour limite, la suite des  $f(x_n)$  ait pour limite  $f(x)$ . (Le lecteur pourra se référer par exemple au Cours de mathématiques I de J. Dixmier, Topologie, chapitre II, § 3.)

Compte tenu de la remarque précédente, on voit que l'espace  $\mathcal{C}(D)$  est *complet*, puisque la limite d'une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur tout compact est continue. De plus, les théorèmes 1 et 2 du n° 2 peuvent s'énoncer comme suit :

*Le sous-espace  $\mathcal{H}(D)$  est fermé dans  $\mathcal{C}(D)$ ; l'application de  $\mathcal{H}(D)$  dans  $\mathcal{H}(D)$ , qui associe à chaque fonction  $f$  sa dérivée  $f'$ , est continue.*

## 2. Séries de fonctions méromorphes

### 1. CONVERGENCE DES SÉRIES DE FONCTIONS MÉROMORPHES

Soit  $D$  un ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$ ; considérons une suite de fonctions  $f_n$  méromorphes dans  $D$ . Il s'agit de donner un sens à la convergence de la série  $\sum_n f_n$ .

*Définition.* On dit que la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur un ensemble  $A \subset D$  s'il est possible d'enlever un nombre fini de termes de la série, de manière que les fonctions  $f_n$  restantes n'aient pas de pôle sur  $A$  et forment une série uniformément convergente sur  $A$ .

De même, on dit que la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $A$  s'il est possible de lui enlever un nombre fini de termes de façon que les termes  $f_n$  restantes n'aient pas de pôle sur  $A$  et forment une série normalement convergente sur  $A$ .

Il est clair que toute série normalement convergente sur  $A$  est uniformément convergente sur  $A$ . Dans ce qui suit, on considérera des séries de fonctions méromorphes dans  $D$  qui convergent uniformément (resp. normalement) sur tout compact  $K$  contenu dans  $D$ . On définit la somme d'une telle série : sur tout ouvert  $U$  relativement compact de  $D$ , c'est la fonction méromorphe

$$(1. 1) \quad \sum_{n \leq n_0} f_n + \left( \sum_{n > n_0} f_n \right),$$

$n_0$  ayant été choisi de manière que la série  $\sum_{n > n_0} f_n$  converge uniformément sur l'adhérence  $\bar{U}$ . Dans (1. 1) le premier terme est une fonction méromorphe dans  $U$ , somme d'un nombre fini de fonction méromorphes; le second terme est une fonction holomorphe dans  $U$ , puisque c'est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions holomorphes dans  $U$ . Il est facile de voir que, dans  $U$ , la fonction méromorphe (1. 1) ne dépend pas du choix de l'entier  $n_0$ .

**THÉORÈME.** Soit une série  $\sum_n f_n$  de fonctions  $f_n$  méromorphes dans  $D$ . Si cette série converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de  $D$ , la somme  $f$  de cette série est une fonction méromorphe dans  $D$ ; la série  $\sum_n f_n'$  des dérivées converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de  $D$ , et sa somme est la dérivée  $f'$  de la somme  $f$  de la série donnée.

*Démonstration.* Nous avons déjà vu que la somme  $f$  est méromorphe dans tout ouvert relativement compact  $U \subset D$ , et par suite est méromorphe dans  $D$ .

Soit donné un ouvert  $U$  relativement compact, et choisissons  $n_0$  comme dans (1. 1); dans  $U$  on a

$$(1. 2) \quad f' = \sum_{n \leq n_0} f_n' + \left( \sum_{n > n_0} f_n \right)'$$

Or on peut dériver terme à terme la série  $\sum_{n > n_0} f_n$  de fonctions holomorphes dans  $U$ , puisqu'elle converge uniformément sur tout compact de  $U$  :

d'après le théorème 2 du § 1, n° 2, la série des dérivées  $\sum f'_n$  converge uniformément vers  $(\sum_{n>n_0} f_n)'$  sur tout compact contenu dans  $U$ . Ceci prouve que la série  $\sum_n f'_n$  de fonctions méromorphes converge uniformément vers  $f'$  sur tout compact contenu dans  $U$ . Cela est vrai pour tout ouvert relativement compact  $U$ ; il s'ensuit que  $\sum f'_n$  converge uniformément vers  $f'$  sur tout compact contenu dans  $D$ .

Si la série  $\sum f_n$  converge *normalement* sur tout compact de  $D$ , le fait que la série  $\sum f'_n$  converge normalement sur tout compact de  $D$  résulte du lemme du n° 2 du § 1.

*Remarque.* Il est évident que l'ensemble  $P(f)$  des pôles de  $f$  est contenu dans la réunion des ensembles  $P(f_n)$ ,  $P(f_n)$  désignant l'ensemble des pôles de  $f_n$ . De plus la relation (1. 1) montre que si les ensembles  $P(f_n)$  sont deux à deux disjoints, l'ensemble  $P(f)$  est *égal* à la réunion des ensembles  $P(f_n)$ ; de façon plus précise, si  $z_0$  est un pôle d'ordre  $k$  de  $f_n$ , c'est un pôle d'ordre  $k$  de  $f$ .

## 2. PREMIER EXEMPLE D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS MÉROMORPHES

Considérons la série

$$(2. 1) \quad \sum_{-\infty < n < +\infty} \frac{1}{(z-n)^2},$$

la sommation étant étendue à tous les entiers  $n$ . Montrons que cette série converge normalement sur tout compact du plan  $\mathbb{C}$ . Un tel compact est contenu dans une bande de la forme  $x_0 \leq x \leq x_1$  (on a posé  $z = x + iy$ ). Il suffit donc de montrer que la série (2. 1) converge normalement dans toute bande de la forme ci-dessus. Une telle bande ne contient qu'un nombre

fini d'entiers  $n$ ; dans la série  $\sum_{n < x_0} \frac{1}{(z-n)^2}$ , chaque terme est majoré par  $\frac{1}{(x_0-n)^2}$ , et par conséquent cette série partielle converge normale-

ment dans la bande. De même, la série partielle  $\sum_{n > x_1} \frac{1}{(z-n)^2}$  converge normalement dans la bande. En enlevant un nombre fini convenable de termes de la série (2. 1), il reste donc une série de fonctions holomorphes qui converge normalement dans la bande. C.Q.F.D.

Soit  $f(z)$  la somme de la série (2. 1); c'est une fonction méromorphe dans tout le plan  $\mathbb{C}$ . La fonction  $f$  admet la période 1 :

$$f(z+1) = f(z);$$

en effet

$$\sum_n \frac{1}{(z + 1 - n)^2} = \sum_{n'} \frac{1}{(z - n')^2}, \quad \text{en posant } n - 1 = n'.$$

Les pôles de  $f$  sont les points entiers  $z = n$ ; ce sont des pôles doubles. Le résidu en un tel pôle est nul, puisqu'au voisinage du point  $z = n$  on a

$$f(z) = \frac{1}{(z - n)^2} + g(z), \quad g \text{ holomorphe.}$$

PROPOSITION 2. 1. La somme  $f(z)$  de la série (2. 1) est égale à  $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$ .

Démonstration. On a  $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} f(z) = 0$  uniformément vis-à-vis de  $x$ ; autrement

dit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a$  tel que  $|y| \geq a$  entraîne  $|f(z)| \leq \varepsilon$ .

En effet, supposons d'abord que  $z$  reste dans une bande  $x_0 \leq x \leq x_1$  et que sa partie imaginaire  $y$  satisfasse à  $|y| \geq a$ ,  $a$  étant  $> 0$ ; dans ce domaine la série (2. 1) est une série normalement convergente de fonctions holomorphes; lorsque  $|y| \rightarrow +\infty$ , chaque terme de la série tend vers 0 uniformément vis-à-vis de  $x$  dans la bande. Donc la somme de cette série (qui est normalement convergente) tend vers 0 quand  $|y| \rightarrow +\infty$ , uniformément vis-à-vis de  $x$  dans la bande. Mais  $f(z)$  possède la période 1, et si on applique la propriété précédente à une bande de largeur au moins égale à 1, on voit que  $f(z)$  tend vers 0 quand  $|y| \rightarrow +\infty$ , uniformément vis-à-vis de  $x$ .

La fonction  $g(z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$  possède les mêmes propriétés que  $f(z)$ :

1° elle est méromorphe dans  $\mathbb{C}$  et admet la période 1;

2° ses pôles sont les points entiers  $z = n$ , ce sont des pôles doubles avec partie principale  $\frac{1}{(z - n)^2}$ ;

3°  $g(z)$  tend vers 0 quand  $|y| \rightarrow +\infty$ , uniformément vis-à-vis de  $x$ .

La propriété 1° est évidente; pour démontrer 2° il suffit, en vertu de la périodicité, de montrer que l'origine 0 est un pôle double avec partie principale  $\frac{1}{z^2}$ ; or

$$\begin{aligned} (2. 2) \quad \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 &= \left(\frac{\pi}{\pi z - \frac{1}{6} \pi^3 z^3 + \dots}\right)^2 = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{1}{6} \pi^2 z^2 + \dots\right)^{-2} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\dots). \end{aligned}$$

Quant à 3°, cela résulte de la relation

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \pi y,$$

qui montre que  $|\sin \pi z|$  tend vers l'infini quand  $|y|$  tend vers l'infini (uniformément vis-à-vis de  $x$ ).

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2. 1 : la fonction  $f(z) - g(z)$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , puisque  $f$  et  $g$  ont les mêmes pôles avec les mêmes parties principales. Montrons que  $f - g$  est bornée : dans une bande  $x_0 \leq x \leq x_1$  elle est bornée pour  $|y| \leq a$  (car une fonction continue sur un compact  $\gamma$  est bornée) et elle est bornée pour  $|y| \geq a$ , puisqu'elle tend vers 0 quand  $|y|$  tend vers l'infini; étant bornée dans chaque bande, la fonction  $f - g$  est bornée dans tout le plan en vertu de la périodicité. D'après le théorème de Liouville (chapitre III, § 1, n° 2), la fonction  $f - g$  est constante; puisqu'elle tend vers 0 quand  $|y|$  tend vers l'infini, cette constante est nulle. La proposition 2. 1 est ainsi démontrée.

*Application.* On a

$$(2. 3) \quad \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z - n)^2},$$

et le second membre est une fonction  $h(z)$  holomorphe au voisinage de  $z = 0$ . On a  $h(0) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}$ . On a donc

$$(2. 4) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} \right] = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Or le premier membre de (2. 4) se calcule aisément à l'aide du développement limité (2. 2); sa valeur est  $\frac{\pi^2}{3}$ , d'où la relation

$$(2. 5) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

due à Euler.

### 3. DEUXIÈME EXEMPLE D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS MÉROMORPHES

Considérons la série

$$(3. 1) \quad \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right).$$

Son terme général est égal à  $\frac{z}{n(z-n)}$ ; on laisse au lecteur le soin de montrer que cette série converge normalement sur tout compact du plan  $\mathbb{C}$ . Sa somme  $F(z)$  est donc une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$ , et ses pôles sont



les entiers  $z = n$ ; ce sont des pôles simples dont le résidu est égal à 1. D'après le théorème du n° 1, la dérivée  $F'(z)$  est la somme de la série des dérivées, c'est-à-dire

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \frac{d}{dz} \left(\frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}\right).$$

Il en résulte que  $F(z) - \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$  est une constante. Or on voit sur (3. 1) que

$F(-z) = -F(z)$ ; donc la fonction  $F(z) - \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$  est une fonction impaire

de  $z$ , et comme c'est une constante, cette constante est nulle.

Dans la série (3. 1) on peut grouper les deux termes relativement à l'entier  $n$  et à l'entier  $-n$ :

$$\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{2z}{z^2 - n^2};$$

on obtient finalement la relation

$$(3. 2) \quad \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}.$$

#### 4. AUTRE EXEMPLE

En procédant comme au n° 2, on démontre

$$(4. 1) \quad \sum_{-\infty < n < +\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)(\operatorname{tg} \pi z)};$$

de là on déduit, en procédant comme au n° 3 :

$$(4. 2) \quad \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

#### 5. LA FONCTION $\wp$ DE WEIERSTRASS

Considérons, comme au chapitre III, § 5, n° 5, un sous groupe discret  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ , ayant pour base un système de deux vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  dont le rapport n'est pas réel. Observons tout de suite que la donnée de  $\Omega$  ne détermine pas entièrement la base  $(e_1, e_2)$ . Si on a une autre base  $(e'_1, e'_2)$ , les vecteurs de la première base s'expriment comme combinaisons linéaires à coefficients entiers des vecteurs de la deuxième, et réciproquement; il en résulte que le déterminant de la matrice des coefficients est un entier qui possède un inverse dans l'anneau des entiers, donc est égal à  $\pm 1$ .

Réciproquement, si  $e'_1$  et  $e'_2$  sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de  $e_1$  et  $e_2$ , et si le déterminant de la matrice des coefficients est égal à  $\pm 1$ , alors les formules de Cramer montrent que, inversement,  $e_1$  et  $e_2$  sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de  $e'_1$  et  $e'_2$ , et par suite  $(e'_1, e'_2)$  est une base de  $\Omega$ .

PROPOSITION 5. 1. Soit donné un sous-groupe discret  $\Omega$  comme ci-dessus. Alors la série

$$(5. 1) \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

converge normalement sur tout compact du plan  $\mathbb{C}$ .

Pour la démonstration nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME. La série  $\sum_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^3}$  est convergente.

Démonstration du lemme. Pour chaque entier  $n \geq 1$ , considérons le parallélogramme  $P_n$  formé des points  $z = t_1 e_1 + t_2 e_2$ , où les nombres réels  $t_1$  et  $t_2$  sont tels que  $\sup(|t_1|, |t_2|) = n$  (cf. figure 10). Sur  $P_n$  il y a exactement  $8n$

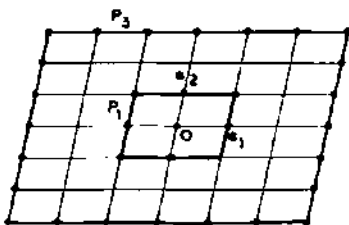


Figure 10

points de  $\Omega$ . La distance de chacun d'eux à 0 est  $\geq kn$ ,  $k$  étant un nombre  $> 0$  fixe ( $k$  est la plus petite distance à 0 des points de  $P_1$ ). La somme des  $\frac{1}{|\omega|^3}$  étendue aux points de  $P_n$  est donc majorée par  $\frac{8n}{k^3 n^3}$ , d'où

$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{8}{k^3 n^2}$$

et comme la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente, le lemme est démontré.

Nous pouvons maintenant prouver que, sur tout disque compact  $|z| \leq r$ , la série (5. 1) converge normalement. On a  $|\omega| \geq 2r$  pour tous les  $\omega$  sauf

un nombre fini; on a donc, pour tous les termes de la série (5. 1) sauf un nombre fini,

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} - \frac{2\omega z - z^2}{\omega^2(\omega - z)^2} \right| = \left| \frac{z \left( 2 - \frac{z}{\omega} \right)}{|\omega|^3 \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right|^2} \right| \leq \frac{r \cdot \frac{5}{2}}{|\omega|^3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{10r}{|\omega|^3} \quad \text{lorsque } |z| \leq r.$$

Il résulte alors du lemme que la série (5. 1) converge normalement dans le disque  $|z| \leq r$ .

*Définition.* La fonction  $\wp(z)$  de Weierstrass est par définition, la fonction méromorphe, somme de la série (5. 1). (Cette fonction dépend, bien entendu de la donnée du sous-groupe discret  $\Omega$ .)

Les pôles de  $\wp$  sont exactement les points de  $\Omega$ ; ce sont des pôles doubles dont le résidu est nul : en effet, au voisinage de  $z = \omega$ , on a

$$\wp(z) = \frac{1}{(z - \omega)^2} + g(z), \quad g \text{ holomorphe.}$$

La fonction  $\wp$  est une fonction *paire* de  $z$ , car

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left( \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

et dans le second membre, il suffit de changer  $\omega$  en  $-\omega$  pour retrouver la série (5. 1).

D'après le théorème du n° 1, on obtient pour dérivée  $\wp'$  le développement en série (normalement convergente sur tout compact) :

$$(5. 2) \quad \wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

Cette relation met en évidence la *périodicité* de la fonction  $\wp'$  :

$$\wp'(z + \omega) = \wp'(z) \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega,$$

et le fait que  $\wp'(-z) = -\wp'(z)$ .

Démontrons que la fonction  $\wp$  elle-même admet pour période tous les  $\omega \in \Omega$ . Il suffit pour cela de démontrer que  $\wp(z + \epsilon_i) = \wp(z)$ ,  $i$  prenant les valeurs 1 et 2. Or

$$(5. 3) \quad \wp(z + \epsilon_i) - \wp(z) = \text{constante},$$

puisque la dérivée  $\wp'(z + \epsilon_i) - \wp'(z) = 0$ . Dans la relation (5. 3) donnons à  $z$  la valeur  $-\frac{\epsilon_i}{2}$ , ce qui est possible puisque  $\frac{\epsilon_i}{2}$  et  $-\frac{\epsilon_i}{2}$  ne sont pas des

pôles de  $p$ ; on voit que la constante du second membre de (5. 3) est égale à  $p\left(\frac{\omega}{2}\right) - p\left(-\frac{\omega}{2}\right)$ , donc nulle puisque la fonction  $p$  est paire.

En résumé, la fonction  $p$  de Weierstrass est une fonction méromorphe admettant pour périodes les points de  $\Omega$ , et dont les pôles sont exactement les points de  $\Omega$ , chacun d'eux ayant l'ordre 2, avec partie principale  $\frac{1}{(z-\omega)^2}$ .

*Développement de Laurent de  $p(z)$ .* Au voisinage de l'origine,  $p$  admet un développement de Laurent qui est a priori de la forme

$$(5. 4) \quad p(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots,$$

puisque la fonction  $p$  est paire, et que d'après (5. 1), la fonction

$$g(z) = p(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega \neq 0} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

holomorphe au voisinage de l'origine, s'annule pour  $z = 0$ . Il est aisé d'exprimer les coefficients  $a_2$  et  $a_4$  à l'aide du sous-groupe discret  $\Omega$ ; en dérivant terme à terme la série  $g(z)$ , on obtient

$$(5. 5) \quad a_2 = 3 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4}, \quad a_4 = 5 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^6}.$$

Dérivons maintenant terme à terme la relation (5. 4), puis élevons au carré; il vient :

$$(5. 6) \quad (p'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + \dots;$$

en élevant (5. 4) au cube on obtient

$$(5. 7) \quad (p(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + \dots,$$

d'où

$$p'^2 - 4p^3 = -20 \frac{a_2}{z^2} - 28a_4 + z^2(\dots).$$

Par conséquent la fonction

$$(5. 8) \quad p'^2 - 4p^3 + 20a_2 p + 28a_4$$

est holomorphe au voisinage de l'origine, et s'annule à l'origine. Or cette fonction admet  $\Omega$  comme groupe de périodes; elle est donc holomorphe au voisinage de tout point de  $\Omega$  et nulle en tout point de  $\Omega$ . Comme cette fonction n'a pas de pôles en dehors de  $\Omega$ , il s'ensuit qu'elle est holomorphe dans tout le plan; étant bornée sur tout compact, elle est bornée dans  $\mathbb{C}$  en

vertu de la périodicité; et puisqu'elle est nulle à l'origine, elle est identiquement nulle d'après le théorème de Liouville. On a finalement l'identité

$$(5.9) \quad \wp'^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4 = 0.$$

Cette relation possède une interprétation importante : considérons la courbe algébrique

$$(5.10) \quad y^2 = 4x^3 - 20a_2x - 28a_4;$$

les formules  $x = \wp(z)$ ,  $y = \wp'(z)$  donnent une représentation paramétrique de cette courbe. On va montrer que tout point  $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  qui satisfait à (5.10) est l'image d'un point  $z \in \mathbb{C}$ , bien déterminé à l'addition près d'un élément de  $\Omega$ .

Cherchons d'abord les  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $2z \in \Omega$  et  $z \notin \Omega$ . En un tel point,  $\wp$  et  $\wp'$  sont holomorphes; on a  $\wp'(z) = \wp'(-z)$  à cause de la périodicité de  $\wp'$ , et  $\wp'(z) = -\wp'(-z)$  puisque  $\wp'$  est une fonction impaire; donc  $\wp'$  s'annule en un tel point. On connaît trois points :

$$(5.11) \quad z = \epsilon_1/2, \quad z = \epsilon_2/2, \quad z = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2,$$

et on voit tout de suite que tout  $z$  tel que  $2z \in \Omega$  et  $z \notin \Omega$  est congru (mod.  $\Omega$ ) à l'un des trois points (5.11); les classes (mod.  $\Omega$ ) des trois points (5.11) sont distinctes.

Puisque  $\wp'$  possède un unique pôle triple dans chaque parallélogramme de périodes, la proposition 5.1 du chapitre III (§ 5) montre que  $\wp'$  possède au plus trois zéros distincts dans chaque parallélogramme de périodes. Ce sont donc les trois points (5.11), ou ceux qui leur sont congrus mod.  $\Omega$ . Toujours d'après la même proposition, la fonction  $\wp$  prend, dans chaque parallélogramme de périodes, au plus deux fois une valeur donnée. Puisque  $\wp(z_0) = \wp(-z_0)$ , la fonction prend exactement deux fois toute valeur de la forme  $\wp(z_0)$ , si  $2z_0 \notin \Omega$ ; au contraire, si  $2z_0 \in \Omega$  et  $z_0 \notin \Omega$ , on a  $\wp'(z_0) = 0$  comme on vient de le voir, donc l'équation  $\wp(z) = \wp(z_0)$  admet  $z_0$  comme racine double, et par suite  $\wp$  ne prend qu'une fois la valeur  $\wp(z_0)$  dans un parallélogramme de périodes.

De tout cela il résulte que chacune des valeurs

$$\wp(\epsilon_1/2), \quad \wp(\epsilon_2/2), \quad \wp((\epsilon_1 + \epsilon_2)/2)$$

est prise une seule fois dans chaque parallélogramme de périodes, et que ces trois valeurs sont distinctes. En vertu de (5.9), ce sont les trois racines de l'équation

$$(5.12) \quad 4x^3 - 20a_2x - 28a_4 = 0,$$

et par suite cette équation a trois racines distinctes. En résumé, on a prouvé :

**PROPOSITION 5.2.** *Le groupe discret  $\Omega$  étant donné, l'équation (5.12), dont les coefficients  $a_2$  et  $a_4$  sont définis par (5.5), a trois racines distinctes. De plus, pour tout point  $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  de la courbe algébrique (5.10), il existe un  $z \in \mathbb{C}$  et un seul (modula  $\Omega$ ) tel que*

$$\wp(z) = x, \quad \wp'(z) = y.$$

On verra (Cf. chapitre VI, § 5, n° 3) qu'inversement, étant donné arbitrairement une relation de la forme (5.10) dont le second membre a trois

racines distinctes, il existe un groupe discret  $\Omega$  tel que  $a_2$  et  $a_4$  satisfassent à (5. 5); si  $\wp$  désigne la fonction de Weierstrass relative à ce groupe  $\Omega$ , les formules  $x = \wp(z)$ ,  $y = \wp'(z)$  donnent alors une représentation paramétrique de la courbe algébrique (5. 10).

### 3. Produits infinis de fonctions holomorphes

#### 1. DÉFINITIONS

*Définition.* Soit  $(f_n(z))$  une suite de fonctions continues dans un ouvert  $D$  du plan complexe. On dit que le produit infini  $\prod_n f_n(z)$  converge normalement sur une partie  $K \subset D$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1° on a  $\lim_n f_n(z) = 1$  uniformément sur  $K$ ; ceci implique en particulier que, pour  $n$  assez grand,  $f_n - 1$  est de module  $< 1$  sur  $K$ , et par conséquent  $\log f_n$  est une fonction définie sur  $K$  (on prend la détermination principale du logarithme);

2° la série de terme général  $\log f_n$  (qui est définie pour  $n$  assez grand) converge normalement sur  $K$ .

On peut donner une condition équivalente à la conjonction des conditions 1° et 2° ci-dessus. Posons  $f_n = 1 + u_n$ ; la condition 1° exprime que la suite  $u_n$  converge vers 0 uniformément sur  $K$ ; lorsque  $u_n$  est petit,  $\log f_n$  et  $u_n$  sont des infiniment petits équivalents, et par conséquent la condition 2° exprime que la série  $\sum_n u_n$  converge normalement sur  $K$ .

En résumé, pour que le produit infini  $\prod_n f_n$  converge normalement sur  $K$ , il faut et il suffit que la série  $\sum_n u_n$  converge normalement sur  $K$ .

*Définition.* On dit que le produit infini  $\prod_n f_n$  converge normalement sur tout compact de l'ouvert  $D$  si, quel que soit le compact  $K$  contenu dans  $D$ , ce produit converge normalement sur  $K$ .

Une condition nécessaire et suffisante est que si l'on pose  $f_n = 1 + u_n$ , la série  $\sum_n u_n$  converge normalement sur tout compact contenu dans  $D$ .

S'il en est ainsi, lorsque  $n_0$  augmente indéfiniment, les produits finis  $\prod_{u \leq n_0} f_u$  convergent uniformément sur tout compact contenu dans  $D$ , vers une limite  $f(z)$ , qui est évidemment une fonction continue de  $z$ . Pour le voir, il suffit de prendre les logarithmes des facteurs  $f_n$  pour  $n$  suffisamment grand.

2. PROPRIÉTÉS DES PRODUITS NORMALEMENT CONVERGENTS  
DE FONCTIONS HOLOMORPHES

**THÉORÈME 1.** Si les fonctions  $f_n$  sont holomorphes dans  $D$ , et si le produit infini  $\prod_n f_n$  converge normalement sur tout compact de  $D$ , alors  $f = \prod_n f_n$  est holomorphe dans  $D$ . On a de plus

$$(2.1) \quad f = f_1 f_2 \cdots f_p \left( \prod_{n>p} f_n \right).$$

L'ensemble des zéros de  $f$  est la réunion de l'ensemble des zéros des fonctions  $f_n$ , l'ordre de multiplicité d'un zéro de  $f$  étant égal à la somme des ordres de multiplicité qu'il possède pour chacune des fonctions  $f_n$ .

*Démonstration.*  $f$  est holomorphe, parce que  $f$  est limite (uniformément sur tout compact) des produits finis, qui sont holomorphes. La formule d'associativité (2.1) est évidente sur tout ouvert relativement compact  $U$ . La fonction  $f_n$  n'a pas de zéros dans  $U$  dès que  $n$  est assez grand, puisque  $u_n = f_n - 1$  converge vers 0 uniformément sur  $U$ ; la dernière assertion de l'énoncé est alors évidente.

**THÉORÈME 2.** Sous les hypothèses du théorème 1, la série de fonctions méromorphes  $\sum_n f'_n / f_n$  converge normalement sur tout compact de  $D$  (au sens du n° 1 du § 2), et sa somme n'est autre que la dérivée logarithmique  $f' / f$ .

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert relativement compact de  $D$ . La fonction

$$(2.2) \quad g_p = \exp \left( \sum_{n>p} \log f_n \right),$$

est définie et holomorphe dans  $U$  pour  $p$  assez grand. D'après (2.1), on a, dans  $U$ ,

$$(2.3) \quad \frac{f'}{f} = \sum_{n \leq p} \frac{f'_n}{f_n} + \frac{g'_p}{g_p}.$$

Or

$$(2.4) \quad \frac{g'_p}{g_p} = \sum_{n>p} \frac{f'_n}{f_n},$$

la série du second membre étant uniformément convergente sur tout compact de  $D$ ; en effet, la série des logarithmes  $\sum \log f_n$  converge (uniformément sur tout compact) vers  $\log g_p$ ; la série des dérivées des fonctions précédentes converge (uniformément sur tout compact) vers la dérivée  $g'_p / g_p$  (cf. § 1, n° 2, théorème 2).

En comparant (2.3) et (2.4), on voit que l'on a, sur  $U$ ,

$$\frac{f'}{f} = \sum_n \frac{f'_n}{f_n},$$

la convergence étant normale sur tout compact de  $U$ . Ceci vaut pour tout  $U$ , d'où le théorème.

### 3. EXEMPLE : DÉVELOPPEMENT DE $\sin \pi z$ EN PRODUIT INFINI

Considérons le produit infini

$$(3.1) \quad f(z) = z \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Ce produit converge normalement sur tout compact du plan  $\mathbb{C}$ , car la série  $\sum_n \frac{z^2}{n^2}$  converge normalement sur tout compact, puisque la série numérique  $\sum_n \frac{1}{n^2}$  est convergente. Donc  $f(z)$  est une fonction holomorphe dans tout le plan, et ses zéros sont toutes les valeurs entières de  $z$ . Ils sont simples.

D'après le théorème 2, on peut différentier logarithmiquement terme à terme; on obtient la série de fonctions méromorphes, normalement convergente sur tout compact du plan,

$$(3.2) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

On a vu (§ 2, n° 3) que la somme de cette série est

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z} = \frac{g'(z)}{g(z)},$$

en posant  $g(z) = \sin \pi z$ . Ainsi  $f'/f = g'/g$ , d'où

$$\frac{f(z)}{z} = c \frac{\sin \pi z}{z}.$$

Il reste à déterminer la constante  $c$ . D'après (3.1),  $f(z)/z$  tend vers 1 lorsque  $z$  tend vers 0, et comme  $\frac{\sin \pi z}{z}$  a pour limite  $\pi$ , on voit que  $c = \frac{1}{\pi}$ . On a ainsi établi la formule

$$(3.3) \quad \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

### 4. LA FONCTION $\Gamma$

Considérons, pour chaque entier  $n \geq 1$ , la fonction holomorphe  $g_n$  définie par

$$(4.1) \quad \begin{aligned} g_n(z) &= z(1+z) \left( 1 + \frac{z}{2} \right) \cdots \left( 1 + \frac{z}{n} \right) n^{-z} \\ &= \frac{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)}{n!} n^{-z}. \end{aligned}$$



On a, pour  $n \geq 2$ ,

$$(4.2) \quad \frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)} = \left(1 + \frac{z}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^z = f_n(z).$$

Si  $|z| \leq r$  et si  $1 \leq r < n$ , on peut considérer la détermination principale de  $\log f_n(z)$ , et l'on a

$$(4.3) \quad |\log f_n(z)| \leq 2 \left( \frac{r^2}{2n^2} + \frac{r^3}{3n^3} + \dots \right) \leq 2 \frac{r^2}{n^2}$$

si  $\frac{r}{n}$  est assez petit. Donc la série  $\sum_n \log f_n(z)$  converge normalement sur tout compact du plan, et par suite le produit infini  $g_1 \cdot \prod_{n \geq 2} \frac{g_n}{g_{n-1}}$  converge normalement sur tout compact du plan. Sa valeur est une fonction holomorphe  $g(z)$ , limite uniforme sur tout compact des fonctions

$$g_n = g_1 f_2 \dots f_n.$$

La fonction  $g$  admet pour zéros les nombres  $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ ; ce sont des zéros simples. Si  $z$  n'est pas entier, on peut former le quotient

$$(4.4) \quad \frac{g(z)}{g(z+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(z)}{g_n(z+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nz}{n+z+1} = z.$$

Donc la fonction méromorphe  $\frac{g(z)}{g(z+1)}$  est en réalité holomorphe et identique à  $z$ . De plus on a

$$(4.5) \quad g(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

*Définition.* La fonction méromorphe  $1/g(z)$  se note  $\Gamma(z)$ . Elle admet pour pôles simples tous les entiers  $n \leq 0$ , et elle satisfait aux relations

$$(4.6) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1,$$

qui résultent évidemment de (4.4) et (4.5). De (4.6) on déduit, par récurrence sur l'entier  $n \geq 0$ ,

$$(4.7) \quad \Gamma(n+1) = n!$$

On se propose maintenant de calculer le produit  $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z)$ . On a

$$(4.8) \quad g(z) \cdot g(1-z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-z}{n} \cdot z \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right),$$

ce qui, d'après le n<sup>o</sup> 3, est égal à  $\frac{\sin \pi z}{\pi}$ . En prenant les inverses, on obtient

$$(4.9) \quad \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

d'où en particulier, pour  $z = \frac{1}{2}$ ,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

*Produit infini de Weierstrass.* En utilisant (4. 1), on peut évidemment écrire

$$(4.10) \quad g_n(z) = z \cdot \prod_{k=1}^n \left( \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \right) \cdot e^{z \left(1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)}.$$

L'exposant  $z \left(1 + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$  tend vers  $Cz$  lorsque  $n$  augmente indéfiniment,  $C$  désignant la constante d'Euler. A la limite, on obtient donc

$$(4.11) \quad g(z) = z e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left( \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \right),$$

et le lecteur vérifiera que le produit du second membre est normalement convergent sur tout compact du plan. Puisque  $g = 1/\Gamma$ , on obtient, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de (4. 11) (cf. théorème 2)

$$(4.12) \quad \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - C + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right),$$

d'où en particulier

$$(4.13) \quad -C = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z} \right).$$

Enfin, on peut dériver terme à terme la relation (4. 12) (cf. § 2, n<sup>o</sup> 1), et on obtient

$$(4.14) \quad \frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

On comparera la série du second membre à la série ayant pour somme  $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$  (§ 2, n<sup>o</sup> 2). Lorsque  $z$  est réel et positif, le second membre de (4. 14) est évidemment positif. Donc  $\log \Gamma(z)$  est une fonction convexe de  $z$  pour  $z$  réel  $> 0$ .

4. Sous-ensembles compacts de  $\mathcal{H}(D)$ 

La caractérisation que l'on va donner des ensembles compacts de  $\mathcal{H}(D)$  constitue ce que l'on appelait autrefois la théorie des « familles normales » de fonctions holomorphes.

1. SOUS-ENSEMBLES BORNÉS DE  $\mathcal{H}(D)$ 

On va donner une définition des sous-ensembles bornés de l'espace vectoriel  $\mathcal{H}(D)$ , définition qui n'est qu'un cas particulier d'une définition valable pour tout espace vectoriel topologique. En particulier, la même définition s'appliquerait aux sous-ensembles bornés de  $\mathcal{C}(D)$ .

*Définition.* Un sous-ensemble  $A \subset \mathcal{H}(D)$  est *borné* si, quel que soit le voisinage  $V(K, \varepsilon)$  de 0, il existe un nombre fini positif  $\lambda$  tel que  $A \subset \lambda V(K, \varepsilon)$ ; on a noté  $\lambda V(K, \varepsilon)$  l'homothétique de  $V(K, \varepsilon)$  par rapport à l'origine 0 dans le rapport  $\lambda$ . La relation  $A \subset \lambda V(K, \varepsilon)$  exprime que l'on a  $|f(z)| \leq \lambda \varepsilon$  pour  $z \in K$ , quelle que soit la fonction  $f \in A$ . Donc, pour qu'un ensemble  $A$  de fonctions holomorphes dans  $D$  soit borné, il faut il suffit que, pour tout compact  $K \subset D$ , il existe un nombre fini  $M(K)$  tel que l'on ait

$$(1.1) \quad |f(z)| \leq M(K) \quad \text{pour tout } z \in K \text{ et toute } f \in A.$$

En d'autres termes,  $A$  est un ensemble borné si les fonctions  $f \in A$  sont *uniformément bornées sur tout compact contenu dans  $D$*  (la borne supérieure  $M(K)$  dépendant évidemment du compact  $K$ ).

Si  $A$  est un sous-ensemble borné de  $\mathcal{H}(D)$ , son adhérence  $\bar{A}$  est bornée (il s'agit de l'adhérence pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $D$ ) : ceci est évident, car si (1.1) a lieu pour toute  $f \in A$ , elle a lieu pour toute fonction appartenant à l'adhérence de  $A$ .

**PROPOSITION 1. 1.** *L'application  $f \rightarrow f'$  de  $\mathcal{H}(D)$  dans lui-même transforme tout ensemble borné en un ensemble borné.*

Cela résulte aussitôt du lemme qui a servi à démontrer le théorème 2 du § 1, n° 2.

## 2. ÉNONCÉ DU THÉORÈME FONDAMENTAL

On se propose de caractériser les sous-ensembles *compacts* de l'espace  $\mathcal{H}(D)$  des fonctions holomorphes dans un ouvert  $D$  du plan complexe.

**PROPOSITION 2. 1.** *Si  $A \subset \mathcal{H}(D)$  est compact, alors  $A$  est fermé et borné.*

*Démonstration.* L'espace  $\mathcal{H}(D)$  est séparé, puisqu'il est métrisable (cf. § 1, n° 3). Donc toute partie compacte de  $\mathcal{H}(D)$  est *fermée*, d'après un résultat classique de Topologie générale.

Il reste à montrer que si  $A$  est compact,  $A$  est borné. Pour cela, soit  $K$  un compact contenu dans  $D$ , et considérons l'application

$$f \rightarrow \sup_{z \in K} |f(z)|$$

de l'espace  $\mathcal{H}(D)$  dans  $\mathbf{R}$ ; il est immédiat que c'est une application continue, donc l'ensemble des valeurs qu'elle prend sur l'ensemble compact des  $f \in A$  est borné. Ceci exprime que les  $f \in A$  sont uniformément bornées sur le compact  $K$ . Ce résultat vaut pour tout compact  $K$  contenu dans  $D$ , et par suite l'ensemble  $A$  est bien un sous-ensemble borné de l'espace vectoriel  $\mathcal{H}(D)$ .

*Remarque.* La proposition 2. 1 est énoncée pour l'espace  $\mathcal{H}(D)$ , mais elle est aussi bien valable pour l'espace  $\mathcal{C}(D)$  des fonctions continues dans  $D$ . En revanche, la réciproque de la proposition 2. 1, que l'on va énoncer maintenant, est valable exclusivement pour les sous-ensembles de l'espace  $\mathcal{H}(D)$  des fonctions *holomorphes* dans  $D$ .

**THÉORÈME FONDAMENTAL.** *Tout sous-ensemble de  $\mathcal{H}(D)$  qui est borné et fermé est compact.*

**COROLLAIRE.** *Pour qu'une partie  $A$  de  $\mathcal{H}(D)$  soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée et fermée.*

La démonstration du théorème fondamental occupera les numéros 3, 4 et 5. Une forme équivalente du théorème fondamental est la suivante :

*Toute partie bornée de  $\mathcal{H}(D)$  est relativement compacte.* La réciproque est d'ailleurs vraie.

### 3. PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

Soit  $A$  un sous-ensemble borné et fermé de  $\mathcal{H}(D)$ . L'espace topologique  $A$  est métrisable, puisque c'est un sous-espace de l'espace métrisable  $\mathcal{H}(D)$ . Pour prouver que  $A$  est compact, il suffit de démontrer que *toute suite infinie d'éléments de  $A$  contient une suite infinie qui converge vers un élément de  $A$ .*

En effet, on a le lemme suivant de Topologie :

**LEMME 1.** *Soit  $A$  un espace métrique tel que toute suite infinie de points de  $A$  contienne une suite infinie qui converge vers un point de  $A$ ; alors  $A$  est compact.*

*Démonstration du lemme 1.* Soit  $\{U_i\}$  un recouvrement de  $A$  par des ouverts  $U_i$ . Il s'agit de montrer que ce recouvrement contient un recouvrement fini. Montrons d'abord :

a) Il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que toute boule  $B(x, \varepsilon)$  soit contenue dans l'un au moins des  $U_i$  (on note  $B(x, \varepsilon)$  la boule fermée de centre  $x \in A$  et de rayon  $\varepsilon$ ).

Pour prouver a), raisonnons par l'absurde : on aurait une suite de points  $x_n \in A$  et une suite décroissante de nombres  $\varepsilon_n$  tendant vers 0, tels que, pour chaque  $n$ , la boule  $B(x_n, \varepsilon_n)$  ne soit contenue dans aucun des  $U_i$ . D'après l'hypothèse, la suite  $(x_n)$  contient une suite infinie qui converge vers un point  $a \in A$ . On peut donc supposer que la suite  $(x_n)$  converge vers  $a$ . Soit  $U_i$  un ouvert contenant  $a$ ; alors  $U_i$  contient une boule  $B(a, r)$ . Dès que  $n$  est assez grand, on a  $x_n \in B(a, r/2)$  et  $\varepsilon_n \leq r/2$ . Il en résulte que  $B(x_n, \varepsilon_n)$  est contenue dans  $U_i$  pour  $n$  assez grand, d'où une contradiction. Ceci prouve a).

Démontrons maintenant :

b) pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $A$  peut être recouvert par un nombre fini de boules  $B(x_n, \varepsilon)$ . Il est clair que la conjonction de a) et b) entraînera qu'il existe un nombre fini d'ouverts  $U_i$  qui recouvrent  $A$ .

On démontre b) en raisonnant à nouveau par l'absurde : on aurait une suite infinie de points  $x_n \in A$  dont les distances mutuelles seraient  $\geq \varepsilon$ ; or on peut, par hypothèse, extraire de cette suite une suite convergente, ce qui conduit évidemment à une contradiction. La démonstration du lemme 1 est ainsi achevée.

#### 4. UN LEMME

D'après le n° 3, tout revient maintenant à montrer que si  $A$  est un ensemble borné contenu dans  $\mathcal{H}(D)$ , toute suite infinie de fonctions  $f_k \in A$  contient une suite infinie qui converge uniformément sur tout compact contenu dans  $D$ . Pour cela il est commode d'avoir un critère de convergence pour les suites de fonctions holomorphes appartenant à un ensemble borné :

**LEMME 2.** Soit  $D$  un disque ouvert de centre  $z_0$ , et soit  $A$  un sous-ensemble borné de  $\mathcal{H}(D)$ . Pour qu'une suite de fonctions  $f_k \in A$  soit convergente (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $D$ ), il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite :

$C(z_0)$  pour chaque entier  $n \geq 0$ , la suite des dérivées  $n$ -ièmes  $f_k^{(n)}(z_0)$  a une limite. (Pour  $n = 0$ , cela signifie que la suite des valeurs des fonctions  $f_k$  au point  $z_0$  a une limite).

*Démonstration du lemme 2.* La condition  $C(z_0)$  est nécessaire, puisque, pour chaque  $n$ , la suite des dérivées  $n$ -ièmes  $f_k^{(n)}$  converge uniformément sur tout compact de  $D$  (§ 1, n° 2, théorème 2). Il reste à montrer que la condition  $C(z_0)$  entraîne que la suite  $(f_k)$  converge uniformément sur tout disque compact de centre  $z_0$  et de rayon  $r$  strictement plus petit que le rayon du disque  $D$ .

Prenons un  $r_0 > r$ ,  $r_0$  étant lui-même strictement plus petit que le rayon de  $D$ . Puisque  $A$  est borné, il existe  $M$  fini tel que

$$(4.1) \quad |f_k(z)| \leq M \quad \text{pour} \quad |z - z_0| \leq r_0.$$

Considérons le développement de Taylor des fonctions holomorphes  $f_k$  :

$$(4.2) \quad f_k(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n,k}(z - z_0)^n.$$

D'après les inégalités de Cauchy, on a

$$(4.3) \quad |a_{n,k}| \leq \frac{M}{(r_0)^n}.$$

Donc, pour  $|z - z_0| \leq r$ , on a, quels que soient  $k$  et  $h$ ,

$$(4.4) \quad |f_k(z) - f_h(z)| \leq \sum_{0 \leq n \leq p} |a_{n,k} - a_{n,h}| r^n + 2M \sum_{n > p} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Puisque  $r/r_0 < 1$ , on peut choisir  $p$  assez grand pour que

$$2M \sum_{n > p} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

soit inférieur à  $\frac{\varepsilon}{2}$ , en notant  $\varepsilon$  un nombre  $> 0$  donné arbitrairement à l'avance. D'après la condition  $C(z_0)$ , lorsque les entiers  $k$  et  $h$  augmentent tous deux indéfiniment, la différence  $a_{n,k} - a_{n,h}$  tend vers 0, pour chaque  $n$ , puisque l'on a

$$a_{n,k} = \frac{1}{n!} f_k^{(n)}(z_0).$$

On peut donc choisir un entier  $k_0$  tel que l'on ait

$$\sum_{0 \leq n \leq p} |a_{n,k} - a_{n,h}| r^n \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad k \geq k_0, \quad h \geq k_0.$$

On voit donc, dans (4.4), que l'on a

$$(4.5) \quad |f_k(z) - f_h(z)| \leq \varepsilon \quad \text{pour} \quad k \geq k_0, \quad h \geq k_0, \quad |z - z_0| \leq r,$$

ce qui prouve que la suite des fonctions  $f_k$  converge uniformément sur le disque compact de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ . Le lemme 2 est ainsi démontré.

## 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème fondamental (n° 2).

L'ouvert donné  $D$  peut être recouvert par une suite dénombrable de disques ouverts de centres  $z_i \in D$ . Pour chaque entier  $n \geq 0$  et pour chaque  $i$ , considérons l'application linéaire

$$(5.1) \quad \lambda_i^n : \mathcal{H}(D) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui, à chaque fonction  $f_i$  associe le nombre  $f_i^{(n)}(z_i)$ . Considérons alors une suite de fonctions  $f_k$  appartenant à l'ensemble borné  $A$ ; en notant  $N$  l'ensemble des entiers positifs, on se propose de montrer l'existence d'un sous-ensemble infini  $N' \subset N$  tel que

$$(5.2) \quad \lim_{k \in N'} \lambda_i^n(f_k) \text{ existe pour chaque couple } (i, n).$$

Or, pour chaque  $i$ , et chaque  $n$ , les nombres  $\lambda_i^n(f_k)$ , lorsque l'indice  $k$  parcourt  $N$ , forment une suite *bornée*, puisque les  $f_k$  parcourent un ensemble borné  $A$  et que les applications  $\lambda_i^n$  sont continues. Rangeons l'ensemble dénombrable des applications  $\lambda_i^n$  en une suite unique, que nous noterons  $\mu_1, \dots, \mu_m, \dots$ . On veut démontrer l'existence d'un sous-ensemble infini  $N'$  de  $N$  tel que

$$(5.3) \quad \lim_{k \in N'} \mu_m(f_k) \text{ existe pour chaque entier } m \geq 1.$$

Pour cela, on va appliquer le procédé de la « suite diagonale ». Puisque la suite des  $\mu_1(f_k)$ , pour  $k \in N$ , est bornée, il existe un sous-ensemble infini  $N_1 \subset N$  tel que

$$\lim_{k \in N_1} \mu_1(f_k) \text{ existe.}$$

La suite des  $\mu_2(f_k)$ , pour  $k \in N_1$ , est bornée; donc il existe un sous-ensemble infini  $N_2 \subset N_1$  tel que

$$\lim_{k \in N_2} \mu_2(f_k) \text{ existe.}$$

On définit ainsi, de proche en proche, des sous-ensembles infinis

$$N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_m.$$

L'ensemble  $N_{m+1}$  est alors un sous-ensemble infini de  $N_m$  tel que

$$\lim_{k \in N_{m+1}} \mu_{m+1}(f_k) \text{ existe.}$$

Considérons maintenant la suite infinie  $N'$  d'entiers, définie comme suit :

pour chaque entier  $m \geq 1$ , le  $m$ -ième terme de la suite  $N'$  est le  $m$ -ième terme de la suite  $N_m$ . La suite  $N'$  est une suite strictement croissante, et il est clair que, à partir du  $m$ -ième, tous les entiers de la suite  $N'$  appartiennent à  $N_m$ . Ceci vaut pour tout  $m$ , et par conséquent la suite  $N'$  vérifie la condition (5.3), ce qui achève enfin la démonstration.

Ainsi le théorème fondamental du § 2 est entièrement établi.

*Remarque.* En réalité, la démonstration qu'on vient de faire consiste à prouver, dans un cas particulier, qu'un produit (infini) d'espaces compacts est compact.

## 6. QUELQUES CONSÉQUENCES DU THÉORÈME FONDAMENTAL

On utilisera souvent le principe suivant : Soit  $A$  un ensemble borné de fonctions holomorphes dans  $D$ ; si une suite de fonctions  $f_k \in A$  n'a qu'une seule fonction adhérente (au sens de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact), cette suite est convergente (au sens de cette topologie).

Cela résulte d'un théorème classique de topologie sur les espaces compacts. Comme application de ce principe, considérons d'abord le cas où l'ouvert  $D$  est connexe et où la suite des fonctions  $f_k$  converge simplement en chaque point d'un ouvert non vide  $D'$  contenu dans  $D$  (la convergence signifie que pour chaque  $z \in D'$  la suite des nombres  $f_k(z)$  a une limite). S'il en est ainsi et si les  $f_k$  appartiennent à un ensemble borné, la suite  $f_k$  converge uniformément sur tout compact de  $D$ . En effet, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions holomorphes dans  $D$ , toutes deux adhérentes à la suite des  $f_k$ , on a évidemment  $f(z) = g(z)$  en tout point  $z \in D'$ , ce qui entraîne que  $f$  et  $g$  sont identiques dans  $D$  (en vertu du principe du prolongement analytique).

Considérons maintenant le cas d'une suite bornée de fonctions holomorphes  $f_k$  satisfaisant à la condition  $C(z_0)$  du lemme 2;  $z_0$  désigne ici un point de  $D$ . Alors, si  $D$  est connexe, la suite  $f_k$  converge uniformément sur tout compact de  $D$ . En effet, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions holomorphes adhérentes à la suite  $(f_k)$ , on a  $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$  pour tout entier  $n \geq 0$ , et par conséquent  $f$  et  $g$  sont identiques en vertu du principe du prolongement analytique.

On peut aussi considérer le cas d'une suite bornée de fonctions holomorphes  $f_k$  dans  $D$ , qui converge simplement en chaque point d'un sous-ensemble  $E$  non discret de  $D$ ,  $D$  étant toujours supposé connexe. Une telle suite converge uniformément sur tout compact de  $D$ , car si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions holomorphes adhérentes à la suite  $(f_k)$ , la différence  $f(z) - g(z)$  s'annule en tout point de  $E$ , donc est identiquement nulle puisque l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe dans  $D$  (connexe) et non identiquement nulle est un ensemble discret.



## Exercices

1. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le disque  $|z| < 1$ , et supposons que  $f(0) = 0$ . Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} f(z^n)$  converge uniformément sur tout compact dans ce disque. (Étant donné  $0 < r < 1$ , utiliser le lemme de Schwarz (dans le disque  $|z| < r$ ) pour majorer  $|f(z^n)|$  par un multiple constant de  $|z|^n$  pour  $|z| \leq r$ ).

2. Soit  $D$  un ouvert connexe du plan  $\mathbb{C}$ , et soit  $\{f_n(z)\}$  une suite de fonctions holomorphes dans  $D$ , supposée uniformément convergente sur tout compact de  $D$  vers une fonction non identiquement nulle  $f(z)$ . Soit de plus  $\Gamma$  le bord orienté d'un compact  $K$  dans  $D$ , tel que  $f(z) \neq 0$  sur  $\Gamma$ . Montrer qu'il existe un entier positif  $N$  tel que, pour  $n \geq N$ , on ait  $f_n(z) \neq 0$  sur  $\Gamma$ , et que  $f_n$  et  $f$  admettent le même nombre de zéros dans  $K$ . (Si  $M$  est la borne inférieure de  $|f(z)|$  sur  $\Gamma$ , et si on choisit  $N$  de telle manière que  $|f_n(z) - f(z)| < M$  pour  $n \geq N$  et  $z \in \Gamma$ , on peut appliquer le théorème de Rouché (exercice 19 du chapitre III) aux fonctions  $f(z)$  et  $f_n(z) - f(z)$ .)

En déduire que, si  $a$  est un zéro de  $f(z)$ , il existe une suite  $(a_n)$  de points de  $D$  telle que

$$\lim_n a_n = a, \quad f_n(a_n) = 0.$$

3. Soit  $\tau$  un nombre complexe tel que  $\text{Im}(\tau) > 0$ , et posons  $q = e^{-\tau}$ . Montrer que les deux séries suivantes convergent uniformément sur tout compact dans le plan  $\mathbb{C}$  de la variable  $u$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty < n < +\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i n u}, \\ & -i \sum_{-\infty < n < +\infty} (-1)^n q^{\binom{n+1}{2}} e^{(2n+1)\pi i u}. \end{aligned}$$

Si on désigne par  $\tilde{\zeta}_0(u)$ ,  $\tilde{\zeta}_1(u)$  les fonctions holomorphes (dans le plan tout entier) définies par ces séries, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_0(u+1) &= \tilde{\zeta}_0(u), & \tilde{\zeta}_1(u+1) &= -\tilde{\zeta}_1(u), \\ \tilde{\zeta}_0(u+\tau) &= -q^{-1} e^{-2\pi i u} \tilde{\zeta}_0(u), & \tilde{\zeta}_1(u+\tau) &= -q^{-1} e^{-2\pi i u} \tilde{\zeta}_1(u), \\ \tilde{\zeta}_0\left(u + \frac{\tau}{2}\right) &= i q^{-1/4} e^{-\pi i u} \tilde{\zeta}_1(u). \end{aligned}$$

Montrer que les fonctions  $\tilde{\zeta}_0(u)$ ,  $\tilde{\zeta}_1(u)$  ne sont pas identiquement nulles. (Montrer, par exemple, que

$$\int_0^1 |\tilde{\zeta}_0(x)|^2 dx = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} |q|^{n^2}.)$$

Montrer que les nombres complexes  $m + n\tau$ , avec  $m, n$  entiers, sont des zéros de la fonction  $\wp_1(u)$ , et que les nombres  $m + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$  sont des zéros de  $\wp_0(u)$ . En évaluant l'intégrale de la fonction  $h'/h$  sur le périmètre d'un parallélogramme de périodes convenablement choisi, montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

4. Soit  $a$  un nombre réel. En procédant comme au n<sup>o</sup> 2, § 2, montrer l'égalité suivante :

$$\frac{\pi i \operatorname{sh} 2\pi a}{\sin \pi(z + ai) \sin \pi(z - ai)} = \sum_{-z < n < +z} \left( \frac{1}{z + n - ai} - \frac{1}{z + n + ai} \right),$$

et en déduire que

$$\frac{\pi}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2\pi a}{\operatorname{ch} 2\pi a - \cos 2\pi z} = \sum_{-z < n < +z} \frac{1}{(z + n)^2 + a^2}.$$

5. Montrer les développements suivants :

$$(i) \quad \frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - z^2},$$

$$(ii) \quad \pi \operatorname{tg} \pi z = 2z \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - z^2}.$$

Déduire de (i) que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Déduire de (i), (ii), en procédant comme au n<sup>o</sup> 3, § 3, les formules suivantes :

$$(iii) \quad \cos \pi z = \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2} \right),$$

$$(iv) \quad \cos \frac{\pi z}{4} - \sin \frac{\pi z}{4} = \prod_{n \geq 1} \left( 1 + \frac{(-1)^n z}{2n-1} \right).$$

(On remarquera que

$$\frac{(\cos t/2 - \sin t/2)'}{\cos t/2 - \sin t/2} = -\frac{1}{2} \frac{1 + \sin t}{\cos t}.)$$

6. Montrer que l'on a

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) + \frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(z + 1/2)}{\Gamma(z + 1/2)} \right) = 2 \frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right).$$

(Utiliser la formule (4. 14).) En déduire, par intégration, que l'on a

$$\Gamma(z)\Gamma(z + 1/2) = e^{a+ib}\Gamma(2z), \quad a, b \text{ constantes};$$

déterminer  $a, b$  en faisant successivement  $z = 1/2, 1$ .

Montrer par la même méthode la formule plus générale pour un entier  $p \geq 2$  quelconque :

$$\Gamma(pz) = (2\pi)^{-(p-1)/2} p^{p-1/2} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{p}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{p-1}{p}\right).$$

(Pour déterminer les constantes d'intégration, on fera  $z = 1/p, 1$ ; on pourra utiliser la formule (4. 9), avec  $z = q/p, 1 \leq q \leq p$ , et la relation  $\sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \cdots \sin \frac{p-1}{p} \pi = p/2^{p-1}$  (pour  $p \geq 2$ ), pour évaluer

$$\Gamma(1/p)\Gamma(2/p) \cdots \Gamma((p-1)/p).$$

7. (i) Montrer que l'intégrale, contenant un paramètre réel  $x$ ,

$$\int_0^{\infty} e^{-t^x-1} dt$$

converge uniformément sur tout intervalle  $a \leq x \leq b$ , où  $0 < a < b$ ;

en déduire que l'intégrale  $\int_0^{\infty} e^{-t^z-1} dt$  définit une fonction holomorphe de  $z$ , que l'on désignera par  $G(z)$ , dans le demi-plan  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

(ii) Montrer que l'on a

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n^n n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \text{ pour } x \text{ réel } > 0,$$

et  $n$  entier  $\geq 1$ ;

$$(2) \quad e^{-t} \left(1 - \frac{e}{2n} t^2\right) \leq \left(1 - \frac{1}{t}\right)^n \leq e^{-t} \text{ pour } 0 \leq t \leq n.$$

(Montrer d'abord les inégalités  $1 - t/n \leq e^{-t/n} \leq 1 - t/n + t^2/2n^2$ , et ensuite utiliser l'inégalité  $a^n - b^n \leq na^{n-1}(a-b)$ , valable pour  $a \geq b \geq 0$ , en prenant  $a = e^{-t/n}, b = 1 - t/n$ .)

En déduire que l'on a

$$\lim_n \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t^z-1} dt,$$

et que

$$G(z) = \Gamma(z) \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

8. Déterminer le résidu de la fonction  $\Gamma(z)$  au pôle  $z = -n, n = 0, 1, 2, \dots$

9. Montrer que, si

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots + a_{2n} z^{2n} + \dots$$

est le développement de Laurent de la fonction  $p(z)$  à l'origine, l'équation différentielle (5.9) du § 2 permet de déterminer par récurrence les coefficients  $a_{2n}$ , avec  $n \geq 3$ , comme polynômes en  $a_2, a_4$ . Déterminer effectivement  $a_6, a_8$ .

10. Soit  $P$  un parallélogramme de périodes de la fonction  $p$ . Montrer que, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres complexes, la fonction

$$(1) \quad p'(z) - \alpha p(z) - \beta$$

possède trois zéros dans  $P$ , et que leur somme est égale à une période (utiliser les propositions 5.1 et 5.2. du chapitre III, § 5). En déduire que, si  $u, v$  sont deux nombres complexes tels que  $u \pm v \not\equiv 0 \pmod{\Omega}$ , on peut trouver  $\alpha, \beta$  de telle sorte que la fonction (1) admette  $u, v$  et  $-u - v$  comme zéros; en déduire que, si  $u + v + w = 0$ , on a

$$\det \begin{vmatrix} p(u) & p'(u) & 1 \\ p(v) & p'(v) & 1 \\ p(w) & p'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Reprenons les notations de l'exercice 3 ci-dessus. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n \geq 1} [(1 - q^{2n-1} e^{2\pi i u})(1 - q^{2n-1} e^{-2\pi i u})]$$

définit une fonction  $f(u)$  holomorphe dans tout le plan de la variable complexe  $u$ . Quels sont les zéros de  $f(u)$ ? Montrer que l'on a

$$f(u) = c \cdot \hat{\sigma}_0(u),$$

où  $c$  désigne une constante.

(On montrera que  $f(u)/\hat{\sigma}_0(u)$  est une fonction doublement périodique et holomorphe dans tout le plan, et on appliquera le corollaire à la proposition 5.1 du chapitre III, § 5.)

# Transformations holomorphes

## 1. Généralités; exemples

1. ÉTUDE LOCALE D'UNE TRANSFORMATION HOLOMORPHE  $w = f(z)$  QUAND  $f'(z_0) \neq 0$

PROPOSITION 1.1. Soit  $w = f(z)$  une fonction holomorphe au voisinage de  $z_0$ ; supposons  $f'(z_0) \neq 0$ , et posons  $w_0 = f(z_0)$ . Lorsque  $z$  et  $w$  sont assez voisins de  $z_0$  et  $w_0$  respectivement, la relation  $w = f(z)$  est équivalente à une relation  $z = g(w)$ , où  $g$  désigne une fonction holomorphe (bien déterminée) de  $w$  au voisinage de  $w_0$ , telle que  $g(w_0) = z_0$ .

Cela résulte du chapitre I, § 2, proposition 9. 1, et aussi du chapitre IV, § 5, proposition 6.1.

Ainsi, au voisinage d'un point, la transformation réciproque d'une transformation holomorphe à dérivée  $\neq 0$  est une transformation holomorphe; de plus, avec les notations précédentes, la dérivée  $g'$  est donnée par la relation

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

En particulier, cette dérivée est  $\neq 0$  au point  $w_0$ .

Notons  $c$  le nombre complexe non nul  $f'(z_0)$ . La transformation linéaire (homogène) tangente au point  $z_0$  à la transformation  $f$  est la transformation

$$(1.1) \quad W = cZ.$$

Considérée comme une transformation du plan, c'est une *similitude directe*. En particulier cette transformation conserve les angles et leur orientation. En d'autres termes, si deux arcs différentiables  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  du plan ( $z$ ) ont pour origine le point  $z_0$ , les transformés de ces arcs par  $w = f(z)$  sont des arcs différentiables d'origine  $w_0$ , et les demi-tangentes au point  $w_0$  font un angle orienté égal à l'angle orienté des demi-tangentes aux arcs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

au point  $z_0$ . Pour cette raison, on dit que la transformation holomorphe  $w = f(z)$  est *conforme* en chaque point  $z_0$  où la dérivée  $f'(z_0)$  est  $\neq 0$ .

Réciproquement, toute transformation linéaire (homogène) du plan qui conserve les angles (sans conserver nécessairement leur orientation) est de la forme (1. 1) ou de la forme

$$(1. 2) \quad W = c\bar{Z}.$$

En effet, si  $T$  est une telle transformation, il existe une similitude directe  $S$  telle que la composée  $S^{-1} \circ T$  laisse fixe le point de coordonnées réelles  $(1, 0)$ . Puisque  $S^{-1} \circ T$  conserve les angles, le point  $(0, 1)$  est transformé en  $(0, a)$ ,  $a$  réel  $\neq 0$ . Alors  $(1, 1)$  est transformé en  $(1, a)$ ; donc les vecteurs  $(1, 1)$  et  $(1, a)$  font avec  $(1, 0)$  des angles égaux, d'où  $a = \pm 1$ . Si  $a = 1$ ,  $S^{-1} \circ T$  est l'identité, et  $T = S$  a la forme (1. 1). Si  $a = -1$ ,  $S^{-1} \circ T = U$  est la symétrie par rapport à l'axe réel, et  $T = S \circ U$  a la forme (1. 2).

C.Q.F.D.

Dans le cas (1.1), la transformation linéaire conserve l'orientation; dans le cas (1. 2), elle change l'orientation. Considérons alors une transformation  $w = f(z)$  définie dans un ouvert connexe  $D$  du plan de la variable complexe  $z = x + iy$ ; supposons-la continûment différentiable avec un jacobien  $\neq 0$  en tout point de  $D$ ; si cette transformation conserve les angles (autrement dit, si la transformation linéaire tangente en chaque point de  $D$  est de l'un des types (1. 1) ou (1. 2)), on a en chaque point de  $D$  l'une des relations

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ces relations ne sont jamais vérifiées simultanément en un point de  $D$ , sinon les dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x$  et  $y$  seraient toutes deux nulles, contrairement au fait que le jacobien est non nul. Puisque les deux fonctions  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}$  sont continues, l'ensemble des points de  $D$  où chacune d'elles est nulle est fermé dans  $D$ ;  $D$  est réunion de ces deux ensembles fermés disjoints, et par suite l'un de ces deux ensembles est vide puisque  $D$  est connexe. Deux cas seulement sont donc possibles : ou bien  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  en tout point de  $D$  (alors la transformation est holomorphe), ou bien  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$  en tout point de  $D$  (et alors  $f$  est une fonction holomorphe de  $\bar{z}$ ). Dans ce dernier cas nous dirons que la transformation est *antiholomorphe*. En résumé :

**PROPOSITION 1. 2.** *Pour qu'une transformation continûment différentiable à jacobien partout  $\neq 0$  dans un ouvert connexe  $D$  du plan conserve les angles, il faut et il suffit qu'elle soit holomorphe ou antiholomorphe. Dans le premier cas, elle conserve l'orientation des angles; dans le second cas, elle change l'orientation des angles.*

## 2. ÉTUDE LOCALE D'UNE TRANSFORMATION HOLOMORPHE $w = f(z)$ QUAND $f'(z_0) = 0$

Considérons d'abord un cas particulier, celui de la transformation

$$(2. 1) \quad w = z^p,$$

où  $p$  désigne un entier  $\geq 2$ . La dérivée de  $z^p$  est nulle pour  $z = 0$ . La transformation réciproque

$$(2. 2) \quad z = w^{1/p}$$

est multiforme; à chaque valeur  $\neq 0$  de  $w$  correspondent  $p$  valeurs distinctes de  $z$ . Les angles ne sont pas conservés à l'origine par la transformation (2. 1), puisque l'argument de  $w$  est égal à  $p$  fois l'argument de  $z$ . On voit que les angles sont multipliés par l'entier  $p$ . Lorsque le point  $z$  tourne une fois autour de l'origine, le point  $w$  tourne  $p$  fois autour de l'origine dans le même sens; on laisse au lecteur le soin de donner un énoncé précis concernant l'*indice* d'une courbe fermée décrite par  $z$  et l'indice de la courbe transformée décrite par  $w$ .

Pour étudier le cas général d'une transformation holomorphe  $w = f(z)$  lorsque  $f'(z_0) = 0$ , nous supposons pour simplifier  $z_0 = 0, f(z_0) = 0$ . Dans ce qui suit il est essentiel de supposer que la fonction  $f$  n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0; si  $p$  est l'ordre de multiplicité du zéro de  $f$  à l'origine, le développement de Taylor de  $f$  à l'origine est de la forme

$$(2. 3) \quad w = cz^p(1 + f_1(z)),$$

la constante  $c$  étant  $\neq 0$ , et la fonction  $f_1$ , holomorphe à l'origine, satisfaisant à  $f_1(0) = 0$ . Posons

$$f_2(z) = c^{1/p}(1 + f_1)^{1/p};$$

la fonction  $f_2(z)$  est holomorphe au voisinage de l'origine (on choisit l'une de ses déterminations), et l'on a  $f_2(0) \neq 0$ . La relation (2. 3) équivaut alors à

$$(2. 4) \quad w = (zf_2(z))^p.$$

Posons

$$(2. 5) \quad zf_2(z) = t.$$

D'après le n<sup>o</sup> 1, cette relation donne  $z = g(t)$ , où  $g$  est holomorphe au voisinage de 0 et nulle au point 0, avec  $g'(0) \neq 0$ . D'après (2. 4), on a  $t = w^{1/p}$ , d'où finalement :

$$(2. 6) \quad z = g(w^{1/p}).$$

Ainsi la relation  $w = f(z)$  est équivalente, au voisinage de l'origine, à une relation de la forme (2. 6), où  $g$  est holomorphe au voisinage de 0 et nulle à l'origine, avec  $g'(0) \neq 0$ .

En particulier, à toute valeur  $w$  assez voisine de 0 et  $\neq 0$  correspondent  $p$  valeurs distinctes de  $z$ . On dit que l'origine est un *point critique* d'ordre  $p$  pour la transformation (2. 6), réciproque de  $w = f(z)$ .

### 3. TRANSFORMATIONS HOLOMORPHES

**THÉORÈME.** Soit  $f$  une fonction holomorphe non constante dans un ouvert connexe  $D$ . Alors l'image  $f(D)$  est un ouvert du plan.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que, pour tout point  $z_0 \in D$ , l'image  $f(D)$  contient tout les points d'un voisinage de  $f(z_0)$ . Le cas où  $f'(z_0) \neq 0$  est justiciable du n° 1 : dans ce cas  $f$  définit un homéomorphisme d'un voisinage de  $z_0$  sur un voisinage de  $f(z_0)$ . Le cas où  $f'(z_0) = 0$  (la fonction  $f$  n'étant pas identiquement nulle au voisinage de  $z_0$ ) est justiciable du n° 2 : dans ce cas il existe un voisinage de  $z_0$  dans lequel la fonction  $f$  prend  $p$  fois chaque valeur suffisamment voisine de  $f(z_0)$  et  $\neq f(z_0)$ . Ainsi, dans tous les cas, le théorème est démontré.

*Remarque.* Pour tout ouvert  $D'$  contenu dans  $D$ , l'image  $f(D')$  est un ouvert. On dit que l'application  $f$  est une *application ouverte*.

**COROLLAIRE.** Si  $f$  est une fonction holomorphe et univalente (Cf. chapitre v, § 1, n° 2) dans un ouvert connexe  $D$ ,  $f$  est un homéomorphisme de  $D$  sur l'ouvert  $f(D)$ , et l'application réciproque  $f^{-1}$  est holomorphe dans  $f(D)$ .

*Démonstration.*  $f$  est une application injective, et est continue et ouverte. Son application réciproque  $f^{-1}$  est continue parce que  $f$  est ouverte. Puisque  $f$  est univalente, on a  $f'(z_0) \neq 0$  en tout point  $z_0 \in D$ , en vertu du n° 2 ; donc, d'après le n° 1,  $f^{-1}$  est holomorphe en chaque point  $f(z_0)$ .

*Définition.* Soient  $D$  un ouvert du plan de la variable  $z$  et  $D'$  un ouvert du plan de la variable  $w$ . On appelle *isomorphisme* de  $D$  sur  $D'$  un homéomorphisme qui est défini par une application holomorphe  $f$ , l'application réciproque étant aussi holomorphe.

Il résulte du corollaire précédent que dès qu'une application holomorphe dans  $D$  est univalente, c'est un *isomorphisme* de  $D$  sur son image  $f(D)$ .

*Remarque.* Les définitions et les résultats précédents s'appliquent non seulement à un ouvert  $D$  du plan de la variable complexe, mais plus généralement à un ouvert  $D$  de la sphère de Riemann, l'application  $f$  pouvant prendre aussi ses valeurs dans la sphère de Riemann.



## 4. EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS HOLOMORPHES MULTIVALENTES

Même lorsque la dérivée  $f'(z)$  est partout  $\neq 0$ , la fonction  $f$  peut être multivalente (c'est-à-dire non univalente). L'exemple le plus simple est celui de la transformation

$$w = e^z$$

qui est périodique de période  $2\pi i$ . Une bande  $a < \text{Im } z < b$  est transformée dans l'ensemble des points  $w$  tels que

$$a < \arg w < b.$$

Dans cette bande la transformation est univalente si et seulement si

$$b - a \leq 2\pi.$$

A titre d'exemple nous étudierons la transformation  $w = \cos z$ , dont la dérivée s'annule pour tous les  $z$  multiples entiers de  $\pi$ . On a

$$w = \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}).$$

La transformation  $w = \cos z$  est donc composée des deux transformations

$$t = e^{iz} \quad \text{et} \quad w = \frac{1}{2} (t + 1/t).$$

Étudions la transformation réciproque : si on se donne arbitrairement  $w$ , il lui correspond deux valeurs de  $t$ , à savoir les racines de l'équation du second degré

$$t^2 - 2wt + 1 = 0,$$

racines dont le produit est égal à 1; elles sont distinctes si  $w \neq \pm 1$ ; à chacune de ces racines correspondent une infinité de valeurs de  $z$ , déduites de l'une d'elles par addition d'un multiple entier arbitraire de  $2\pi$ .

Posons  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  ( $x, y, u, v$  étant réels). On a

$$u = \text{ch } y \cos x, \quad v = -\text{sh } y \sin x.$$

Si on fixe  $y$ , le point  $(u, v)$ , lorsque  $x$  varie, décrit l'ellipse

$$\frac{u^2}{\text{ch}^2 y} + \frac{v^2}{\text{sh}^2 y} = 1$$

(il la décrit une fois si  $x$  varie dans un intervalle d'amplitude  $2\pi$ ). Si on fixe  $x$ , le point  $(u, v)$ , lorsque  $y$  varie, décrit une fois l'une des deux branches de l'hyperbole

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = 1.$$

Pour étudier comment  $w$  varie en fonction de  $z$ , il suffira, à cause de la périodicité, de faire varier  $x$  de  $-\pi$  à  $+\pi$ ,  $y$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . De plus, si on change  $z$  en  $-z$ ,  $w$  ne change pas; on fera donc varier  $x$  seulement de  $0$  à  $\pi$ . Si on change  $y$  en  $-y$  sans changer  $x$ ,  $u$  n'est pas changé, et  $v$  est changé en  $-v$ : donc à deux points  $z_1$  et  $z_2$  symétriques par rapport à l'axe réel correspondent deux points  $w_1$  et  $w_2$  symétriques par rapport à l'axe réel. Finalement, il suffira de faire varier  $x$  de  $0$  à  $\pi$ , et  $y$  de  $0$  à  $+\infty$ . Soit donc  $D$  l'ouvert

$$(D) \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0.$$

Faisons d'abord décrire au point  $z = x + iy$  le « bord orienté » de  $D$ :  
 1° lorsque,  $x$  restant  $0$ ,  $y$  décroît de  $+\infty$  à  $0$ ,  $w$  reste sur l'axe réel, en décroissant de  $+\infty$  à  $+1$ ; 2° lorsque,  $y$  restant  $0$ ,  $x$  croît de  $0$  à  $\pi$ ,  $w$  reste

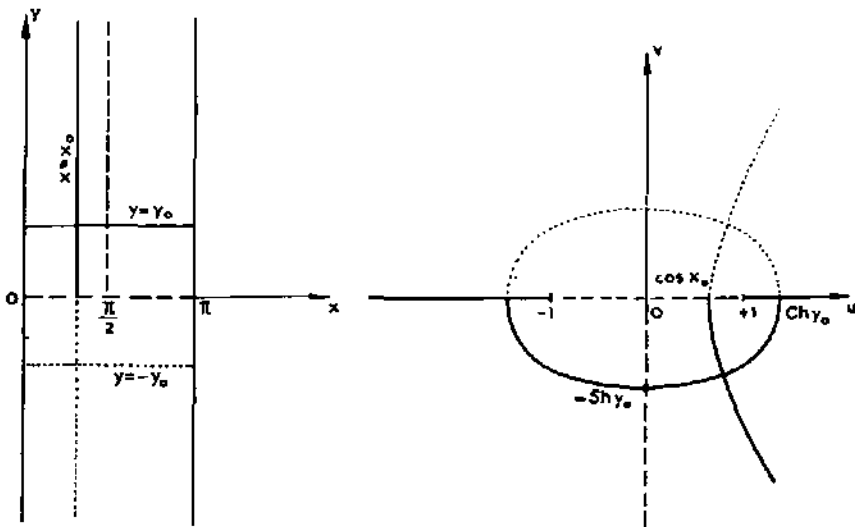


Figure 11

sur l'axe réel, en décroissant de  $+1$  à  $-1$ ; 3° lorsque,  $x$  restant égal à  $\pi$ ,  $y$  croît de  $0$  à  $+\infty$ ,  $w$  reste sur l'axe réel, en décroissant de  $-1$  à  $-\infty$ . Ainsi l'application  $w = \cos z$  applique homéomorphiquement le bord de  $D$  sur l'axe réel.

Le lecteur montrera que  $D$  est appliqué homéomorphiquement sur le demi-plan inférieur  $v < 0$ . D'une façon précise, lorsque le point  $z$  décrit un segment  $y = y_0$  (constante  $> 0$ ),  $x$  croissant de  $0$  à  $\pi$ , le point  $w$  décrit une fois et une seule une demi-ellipse ayant  $+1$  et  $-1$  pour foyers, située dans le demi-plan  $v < 0$ , ayant pour grand axe  $\text{ch } y_0$  et pour petit axe  $\text{sh } y_0$ . Lorsque le point  $z$  décrit une demi-droite  $x = x_0$  ( $0 < x_0 < \pi$ ),  $y$

croissant de 0 à  $+\infty$ , le point  $w$  décrit une fois et une seule une demi-branché d'hyperbole ayant  $+1$  et  $-1$  pour foyers, située dans le demi-plan  $v < 0$ , ayant pour axes  $|\cos x_0|$  et  $\sin x_0$ .

La bande  $0 < x < \pi$  ( $y$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) est appliquée homéomorphiquement sur le plan privé des deux demi-droites (portées par l'axe réel)  $u \geq +1$  et  $u \leq -1$ .

En ce qui concerne les angles, on observera que la transformation  $w = \cos z$  double les angles en chacun des points  $z = 0$  et  $z = \pi$  (les angles droits du bord de  $D$  sont transformés en angles plats); ceci correspond au fait que la dérivée  $-\sin z$  de  $\cos z$  possède un zéro simple en chacun de ces points. A l'intérieur de  $D$ , la transformation conserve les angles; elle transforme les parallèles aux axes de coordonnées du plan ( $z$ ) en des ellipses et hyperboles homofocales, comme on l'a vu.

## 2. Représentation conforme

### 1. POSITION DU PROBLÈME

Soient  $D$  et  $D'$  deux ouverts connexes de la sphère de Riemann  $S_2$ . On se demande s'il existe un isomorphisme de  $D$  sur  $D'$ , ou, ce qui revient au même, s'il existe une application holomorphe univalente de  $D$  sur  $D'$ . Une condition nécessaire pour que le problème précédent ait une solution est de nature purement topologique. Il faut que  $D$  et  $D'$  soient homéomorphes; en effet, tout isomorphisme est un homéomorphisme. Par exemple, si  $D$  est simplement connexe, il est nécessaire que  $D'$  soit aussi simplement connexe. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, comme le montre le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** *Le plan  $\mathbb{C}$  et le disque ouvert  $|z| < 1$  ne sont pas isomorphes (bien qu'ils soient homéomorphes).*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un isomorphisme  $f$  de  $\mathbb{C}$  sur le disque  $|z| < 1$ . Alors  $f$  est une fonction holomorphe et bornée, donc d'après le théorème de Liouville elle est constante, ce qui implique une contradiction puisqu'elle doit être univalente.

### 2. AUTOMORPHISMES DE $D$

Supposons qu'il existe au moins un isomorphisme  $f$  de  $D$  sur  $D'$ , et cherchons alors à déterminer tous les isomorphismes  $g$  de  $D$  sur  $D'$ . La transformation  $S = f^{-1} \circ g$  est un isomorphisme de  $D$  sur lui-même, autrement dit est un automorphisme de  $D$ ; on a

$$(2. 1) \quad g = f \circ S.$$

Réciproquement, si  $S$  est un automorphisme de  $D$ , la transformation  $g$  définie par (2. 1) est un isomorphisme de  $D$  sur  $D'$ . Ainsi on obtient tous les isomorphismes de  $D$  sur  $D'$  en composant un automorphisme arbitraire de  $D$  avec un isomorphisme particulier  $f$  de  $D$  sur  $D'$ . Il est clair que les automorphismes de  $D$  forment un *groupe*  $\Gamma(D)$ . De plus si  $f$  est un isomorphisme de  $D$  sur  $D'$ , l'application  $S \rightarrow f \circ S \circ f^{-1}$  est un isomorphisme du groupe  $\Gamma(D)$  sur le groupe  $\Gamma(D')$ .

On se propose, dans les exemples qui suivent, de déterminer explicitement le groupe  $\Gamma(D)$  pour certains ouverts  $D$  particuliers.

### 3. AUTOMORPHISMES DU PLAN COMPLEXE

On prend ici pour  $D$  le plan  $\mathbb{C}$  tout entier. Soit  $z \rightarrow f(z)$  un automorphisme de  $\mathbb{C}$ ; la fonction  $f(z)$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ ; donc deux cas seulement sont possibles a priori :

1°  $f$  admet le point à l'infini comme point singulier essentiel;

2°  $f$  est un polynôme.

On va voir que le cas 1° est impossible : puisque  $f$  est univalente, l'image par  $f$  de la couronne  $|z| > 1$  ne rencontre pas l'image par  $f$  du disque  $|z| < 1$ , image qui est un ouvert non vide. Donc l'image de  $|z| > 1$  n'est pas dense dans tout le plan, et par conséquent, d'après un théorème de Weierstrass (chapitre III, § 4, n° 4), le point à l'infini n'est pas singulier essentiel pour  $f$ . Ainsi  $f$  est un polynôme de degré  $n \geq 1$ ; d'après le théorème de d'Alembert, l'équation  $f(z) = w$  admet  $n$  racines distinctes (sauf pour des valeurs particulières de  $w$ ). Or, par hypothèse,  $f$  est univalente. On en conclut  $n = 1$ . On a donc démontré le théorème suivant :

**THÉORÈME. 2.** *Le groupe des automorphismes de  $\mathbb{C}$  se compose des transformations linéaires*

$$(3. 1) \quad z \rightarrow az + b, \quad a \neq 0.$$

Lorsque  $a = 1$ , la transformation (3. 1) est une *translation*; elle n'a pas de point fixe. Au contraire, lorsque  $a \neq 1$ , la transformation admet un point fixe unique, à savoir

$$z = -\frac{b}{1-a}.$$

On observera que les transformations (3. 1) forment un groupe *transitif* dans le plan  $\mathbb{C}$  : autrement dit, étant donnés deux points quelconques  $z_1$  et  $z_2$ , il existe au moins une transformation du groupe qui transforme  $z_1$  en  $z_2$ . Le *sous-groupe d'isotropie* d'un point  $z_0$ , c'est-à-dire le sous-groupe

des transformations qui laissent fixe le point  $z_0$ , se détermine aisément; par exemple le groupe d'isotropie de l'origine 0 se compose des similitudes directes  $z \rightarrow az$ .

#### 4. AUTOMORPHISMES DE LA SPHÈRE DE RIEMANN

Considérons les transformations homographiques

$$(4. 1) \quad w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Si on multiplie les constantes  $a, b, c, d$  par un même nombre complexe  $\neq 0$ , on obtient la même transformation. Ainsi on devra toujours considérer que les coefficients  $a, b, c, d$ , ne sont définis qu'à un facteur constant près.

Une telle transformation est définie sur la sphère de Riemann  $S_2$ , et à valeurs dans la sphère de Riemann  $S_2$ : d'une façon précise, pour  $z = \infty$ , on a  $w = a/c$  si  $c \neq 0$ , et  $w = \infty$  si  $c = 0$  (ce qui implique  $a \neq 0$ ). Chaque transformation (4. 1) possède une transformation réciproque

$$(4. 2) \quad z = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

ce qui montre que chaque transformation homographique (4. 1) est un homéomorphisme de  $S_2$  sur  $S_2$ .

Les transformations (4. 1) forment ainsi un groupe  $G$  d'automorphismes de la sphère de Riemann  $S_2$ . On se propose de démontrer :

**THÉORÈME 3.** *La sphère de Riemann  $S_2$  ne possède pas d'autre automorphisme que les homographies (4. 1).*

*Démonstration.* Considérons le sous-groupe formé des transformations de  $G$  qui laissent fixe le point à l'infini de  $S_2$ . Ce sont les transformations pour lesquelles  $c = 0$ , et puisque  $d \neq 0$ , on peut supposer  $d = 1$ . Autrement dit, le sous-groupe des transformations de  $G$  laissant fixe le point à l'infini n'est autre que le groupe de tous les automorphismes  $w = az + b$  du plan  $\mathbb{C}$  (théorème 2). Ce groupe est donc aussi le groupe de tous les automorphismes de  $S_2$  laissant fixe le point à l'infini. Le théorème 3 résulte alors d'un lemme de caractère général :

**LEMME.** *Soit  $D$  un ouvert de la sphère de Riemann  $S_2$  et soit  $G$  un sous-groupe du groupe  $\Gamma(D)$  de tous les automorphismes de  $D$ . Supposons vérifiées des deux conditions suivantes :*

- a)  $G$  est transitif dans  $D$ ;
  - b) il existe au moins un point de  $D$  dont le groupe d'isotropie est contenu dans  $G$ .
- Alors  $G$  est le groupe de tous les automorphismes de  $D$ .

*Démonstration du lemme.* Soit  $S \in \Gamma(D)$ , et soit  $z_0 \in D$  un point dont le groupe d'isotropie soit contenu dans  $G$ . Puisque  $G$  est transitif, il existe  $T \in G$  telle que  $T(z_0) = S(z_0)$ . Donc la transformation  $T^{-1} \circ S \in \Gamma(D)$  laisse fixe le point  $z_0$ , et appartient donc à  $G$ ; ainsi  $S = T \circ (T^{-1} \circ S)$  appartient à  $G$ .  
C.Q.F.D.

### 5. ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU GROUPE DES HOMOGRAPHIES; ÉQUIVALENCE DU DEMI-PLAN ET DU DISQUE

Lorsque  $c \neq 0$ , la transformation (4. 1) se met sous la forme canonique bien connue :

$$(5. 1) \quad w = \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)/c^2}{z + d/c}.$$

Il en résulte que (4. 1) est composée des transformations

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_3 = kz_2, \quad w = z_3 + \frac{a}{c},$$

(avec  $k = \frac{bc - ad}{c^2}$ ), dont chacune est homographique d'un type particulier. Ainsi toute transformation homographique est composée de translations, d'homothéties de rapport  $\neq 0$ , et d'inversions-symétries (en appelant inversion-symétrie une transformation de la forme  $z' = 1/z$ ; cette transformation est en effet composée d'une symétrie par rapport à l'axe réel et d'une inversion de pôle 0 et de puissance 1). Le résultat précédent a été établi pour les transformations (4. 1) telles que  $c \neq 0$ ; lorsque  $c = 0$  il est encore vrai, d'une manière évidente. On en déduit que toute transformation homographique transforme un cercle ou une droite dans un cercle ou une droite (les droites étant considérées comme les cercles passant par le point à l'infini). D'autre part, les transformations homographiques sont conformes, puisque ce sont des applications holomorphes de  $S_2$  dans  $S_2$ ; en particulier elles transforment des cercles (ou droites) orthogonaux en cercles (ou droites) orthogonaux.

Étant donnés arbitrairement deux cercles (ou droites), il existe toujours une homographie transformant l'un dans l'autre. En particulier il existe une homographie transformant l'axe réel  $y = 0$  dans le cercle-unité : il suffit de prendre par exemple la transformation

$$(5. 2) \quad w = \frac{z - i}{z + i}.$$

Pour le vérifier, il suffit de s'assurer que trois points particuliers de l'axe réel (par exemple 0, 1 et  $\infty$ ) sont transformés en des points du cercle-unité (ici, les points  $w = -1$ ,  $w = -i$  et  $w = i$ ).

*A priori* une transformation homographique qui transforme l'axe réel dans le cercle-unité transforme l'un des demi-plans limité par l'axe réel dans l'intérieur du disque-unité, et l'autre demi-plan dans l'extérieur du disque-unité (point à l'infini inclus). Dans le cas de la transformation (5. 2), le demi-plan supérieur  $y > 0$  est transformé dans le disque  $|w| < 1$ , puisque le point  $z = i$  est transformé dans  $w = 0$ .

#### 6. AUTOMORPHISMES DU DEMI-PLAN ET DU DISQUE-UNITÉ

Notons P le demi-plan  $y > 0$ , et B le disque ouvert  $|w| < 1$ . D'après la fin du n° 2, la transformation (5. 2) établit un isomorphisme du groupe  $\Gamma(P)$  sur le groupe  $\Gamma(B)$ . On se propose maintenant de déterminer explicitement ces deux groupes.

On a déjà déterminé le groupe de tous les automorphismes de la sphère de Riemann. Parmi eux, ceux qui transforment l'axe réel  $y = 0$  en lui-même forment un sous-groupe; c'est le sous-groupe des transformations homographiques

$$(6. 1) \quad z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

où les coefficients  $a, b, c, d$ , sont réels. En effet, il est évident que si les coefficients sont réels, les transformations (6. 1) transforment l'axe réel en lui-même; réciproquement, si l'axe réel est transformé en lui-même, les coefficients  $a, b, c, d$ , sont déterminés, à un facteur près, par un système d'équations linéaires à coefficients réels, que l'on obtient en considérant trois points distincts  $z_1, z_2, z_3$  de l'axe réel et en écrivant que les transformés de ces points sont réels.

Comme les coefficients de (6. 1) ne sont définis qu'à un facteur réel  $\neq 0$  près, on peut, dans (6. 1), supposer que  $ad - bc = \pm 1$ . On voit facilement que, parmi les transformations (6. 1), celles qui transforment le demi-plan supérieur  $y > 0$  en lui-même sont celles pour lesquelles  $ad - bc = 1$ ; pour cela, il suffit de vérifier que la partie réelle de  $\frac{ai + b}{ci + d}$  est  $> 0$ . Les transformations (6. 1) pour lesquelles  $ad - bc = 1$  forment un sous-groupe G du groupe  $\Gamma(P)$  de tous les automorphismes du demi-plan P; chaque transformation de G détermine les coefficients  $a, b, c, d$ , au facteur  $\pm 1$  près.

**THÉORÈME 4.** *Le groupe précédent G contient tous les automorphismes du demi-plan P. Lorsque ce théorème sera démontré, il en résultera que chaque automorphisme du demi-plan P se prolonge en un automorphisme de la sphère de Riemann, ce qui n'est nullement évident a priori.*

Pour démontrer que  $G = \Gamma(P)$ , on observe d'abord que le groupe G est transitif dans le demi-plan P. En effet, le point  $i$  peut être transformé

en un point arbitraire  $a + ib$  ( $b > 0$ ) du demi-plan par une transformation convenable de  $G$ ; c'est immédiat. Si nous montrons que le groupe d'isotropie d'un point du demi-plan (par exemple le point  $z = i$ ) est contenu dans  $G$ , le théorème 4 sera démontré grâce au lemme du n° 4. Tout revient donc à montrer que le groupe d'isotropie du point  $i$  est formé de transformations homographiques.

La transformation (5. 2) définit un isomorphisme de ce groupe d'isotropie sur le sous-groupe de  $\Gamma(B)$  formé des automorphismes du disque  $|w| < 1$  qui laissent fixe le centre  $0$ . Il suffira alors de démontrer :

**PROPOSITION 6. 1.** *Si un automorphisme du disque  $|z| < 1$  laisse fixe  $0$ , c'est une rotation  $z \rightarrow ze^{i\theta}$ ,  $\theta$  étant un angle quelconque.*

*Démonstration de la proposition 6. 1.* Soit  $z \rightarrow f(z)$  un automorphisme du disque-unité tel que  $f(0) = 0$ . D'après le lemme de Schwarz (chapitre III, § 3), on a

$$|f(z)| \leq |z|$$

pour tout  $z$  tel que  $|z| < 1$ . Mais en appliquant le lemme de Schwarz à la transformation réciproque on trouve aussi

$$|z| \leq |f(z)|.$$

En comparant on obtient  $|f(z)| = |z|$ , et par suite, toujours d'après le lemme de Schwarz, on a  $f(z) = cz$ ,  $c$  étant une constante de module égale à 1. Ceci achève la démonstration.

Ainsi se trouve en même temps achevée la démonstration du théorème 4. A titre d'exercice, on déterminera explicitement le sous-groupe d'isotropie du point  $z = i$  dans le groupe de tous les automorphismes du demi-plan supérieur  $y > 0$ . Il est transformé du sous-groupe d'isotropie de  $0$  dans le groupe des automorphismes du disque-unité, par la transformation (5. 2). On trouve les transformations

$$z \rightarrow \frac{z + i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - z \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}$$

qui dépendent du paramètre réel  $\theta$ .

Pour déterminer le groupe des automorphismes du disque-unité  $|z| < 1$ , il suffit en principe de transformer par (5. 2) le groupe des automorphismes du demi-plan supérieur. Mais on va procéder directement. Il s'agit de déterminer toutes les transformations homographiques

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

qui transforment le cercle  $z\bar{z} - 1 = 0$  en le cercle  $z'\bar{z}' - 1 = 0$ , et trans-



forment le disque ouvert  $1 - z\bar{z} > 0$  en le disque ouvert  $1 - z'\bar{z}' > 0$ . La première de ces conditions exprime que l'on a

$$(az + b)(\bar{a}\bar{z} + \bar{b}) = (cz + d)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d})$$

quel que soit  $z$  de module 1, ce qui implique

$$(6. 2) \quad a\bar{b} = c\bar{d}$$

et

$$(6. 3) \quad a\bar{a} - c\bar{c} = d\bar{d} - b\bar{b}.$$

On a alors

$$1 - z'\bar{z}' = \frac{(d\bar{d} - b\bar{b})(1 - z\bar{z})}{|cz + d|^2},$$

et pour que  $1 - z\bar{z} > 0$  entraîne  $1 - z'\bar{z}' > 0$ , il faut et il suffit que

$$(6. 4) \quad d\bar{d} - b\bar{b} > 0.$$

L'inégalité (6. 4), avec l'égalité (6. 3), entraîne  $a \neq 0$ ,  $d \neq 0$ ; d'après (6. 2) on a

$$\frac{c}{a} = \frac{\bar{b}}{\bar{d}} = \bar{\lambda}, \quad \text{avec} \quad |\lambda| < 1,$$

et, d'après (6. 3),

$$|a| = |d|.$$

D'où :

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{d} \frac{z + \lambda \frac{d}{a}}{1 + \bar{\lambda} \frac{a}{d} z} = e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z},$$

où  $\theta$  est réel, et  $z_0$  complexe tel que  $|z_0| < 1$ .

En résumé, on a démontré :

**PROPOSITION 6. 2.** *Le groupe des automorphismes du disque-unité se compose des transformations homographiques de la forme :*

$$(6. 5) \quad z' = e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \quad \theta \text{ réel}, \quad |z_0| < 1.$$

### 3. Théorème fondamental de la représentation conforme

#### 1. ÉNONCÉ DU THÉORÈME FONDAMENTAL

On se propose le problème suivant : étant donné un ouvert  $D$  du plan  $\mathbb{C}$ , trouver tous les isomorphismes (s'il en existe) de  $D$  sur le disque-unité  $|z| < 1$ . Une condition nécessaire pour l'existence d'un tel isomorphisme est la suivante :

*Il faut que  $D$  soit simplement connexe et distinct de  $\mathbb{C}$ .*

La première condition est nécessaire, puisque  $D$  doit être homéomorphe au disque ouvert, qui est simplement connexe; la condition  $D \neq \mathbb{C}$  est nécessaire à cause du théorème 1 du § 2, n° 1. Le théorème fondamental qui suit affirme que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

**THÉORÈME FONDAMENTAL.** *Tout ouvert  $D$  du plan  $\mathbb{C}$ , simplement connexe et distinct de  $\mathbb{C}$ , est isomorphe au disque ouvert  $|z| < 1$ .*

La démonstration de ce théorème fera l'objet des numéros 3 et 4. Auparavant observons que tout isomorphisme de  $D$  sur  $|z| < 1$  est composé d'un isomorphisme particulier et d'un automorphisme arbitraire du disque-unité. Comme les automorphismes du disque-unité forment un groupe transitif, on voit que s'il existe un isomorphisme de  $D$  sur le disque-unité, il existe un isomorphisme qui transforme un point arbitrairement choisi  $z_0 \in D$  dans le centre  $o$  du disque. Ainsi nous astreindrons l'isomorphisme cherché  $f$  à la condition

$$(1.1) \quad f(z_0) = o.$$

De plus, le groupe d'isotropie du centre du disque-unité se compose des rotations autour de  $o$  (§ 2, proposition 6.1); on peut donc astreindre l'isomorphisme  $f$  à la condition supplémentaire

$$(1.2) \quad f'(z_0) > 0.$$

En résumé, les conditions (1.1) et (1.2) déterminent entièrement l'isomorphisme cherché  $f$ , s'il existe.

Nous indiquerons tout de suite deux corollaires du théorème fondamental.

**COROLLAIRE 1.** *Deux ouverts simplement connexes  $D_1$  et  $D_2$  du plan  $\mathbb{C}$ , s'ils sont tous deux distincts de  $\mathbb{C}$ , sont isomorphes.*

On observera que, en vertu du théorème 1 du § 2 (n° 1), un ouvert  $D$  simplement connexe et distinct de  $\mathbb{C}$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{C}$ . Toutefois :

**COROLLAIRE 2.** *Deux ouverts simplement connexes  $D_1$  et  $D_2$  du plan  $\mathbb{C}$  sont toujours homéomorphes.*

En effet, s'ils sont distincts de  $\mathbb{C}$ , cela résulte du corollaire 1; et si l'un d'eux est égal à  $\mathbb{C}$ , cela résulte du fait que le disque  $|z| < 1$  est homéomorphe au plan  $\mathbb{C}$ .

## 2. RÉDUCTION AU CAS D'UN DOMAINE BORNÉ

**PROPOSITION 2.1.** *Soit  $D$  un ouvert satisfaisant aux hypothèses du théorème fondamental. Alors il existe un isomorphisme de  $D$  sur un ouvert borné du plan  $\mathbb{C}$ .*

En effet, il existe par hypothèse un point  $a \in D$ . Considérons, dans  $D$ , la fonction  $\log(z - a)$ ; on peut en choisir une détermination  $g(z)$ , puisque  $D$

est simplement connexe (Cf. chapitre II, § 1, n° 7). La fonction  $g$ , qui est holomorphe dans  $D$ , est univalente dans  $D$ , car la relation  $g(z_1) = g(z_2)$  entraîne

$$e^{i\theta(z_1)} = e^{i\theta(z_2)}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad z_1 - a = z_2 - a.$$

Choisissons un point  $z_0 \in D$ ; la fonction  $g$  prend dans  $D$  toutes les valeurs d'un disque  $E$  de centre  $g(z_0)$  (cf. § 1, n° 1). Si on translate ce disque par une translation  $2\pi i$ , on obtient un disque dont aucun point n'appartient à l'image de  $D$  par  $g$ , puisque la fonction  $e^z$  est univalente. Il s'ensuit que la fonction

$$\frac{1}{g(z) - g(z_0) - 2\pi i}$$

est holomorphe, univalente et bornée dans  $D$ . Elle définit donc un isomorphisme de l'ouvert  $D$  sur un ouvert borné du plan  $\mathbb{C}$ , et la proposition 2. 1 est démontrée.

Désormais, nous supposons  $D$  borné; au moyen d'une translation et d'une homothétie, nous pourrions supposer que  $z_0 = 0$ , et que  $D$  est contenu dans le disque  $|z| < 1$ . Ces hypothèses seront constamment faites désormais.

### 3. UNE PROPRIÉTÉ D'EXTREMUM

PROPOSITION 3. 1. Soit  $A$  l'ensemble des fonctions  $f$  holomorphes et univalentes dans  $D$ , satisfaisant aux deux conditions

$$(3. 1) \quad f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \quad \text{pour} \quad z \in D.$$

Pour que l'image  $D'$  de  $f$  soit exactement le disque-unité, il faut et il suffit que  $|f'(0)|$  soit maximum parmi l'ensemble des valeurs qu'il peut prendre lorsque  $f$  parcourt  $A$ .

*Démonstration.*

1° La condition est nécessaire; soit  $f \in A$  et soit  $D'$  son image; soit  $g$  un isomorphisme de  $D$  sur le disque-unité tel que  $g(0) = 0$ . On a  $f = h \circ g$ , où  $h$  est une application holomorphe du disque-unité sur  $D'$ , avec  $h(0) = 0$ . On a  $|h'(0)| \leq 1$  d'après l'inégalité de Cauchy, d'où

$$|f'(0)| \leq |g'(0)|.$$

2° La condition est suffisante. Pour le voir, on va montrer que si  $f \in A$  et s'il existe un  $a$  n'appartenant pas à l'image de  $f$  (avec  $|a| < 1$ ), il existe une  $g \in A$  telle que

$$|g'(0)| > |f'(0)|.$$

Pour cela, considérons d'abord la fonction

$$(3.2) \quad F(z) = \log \frac{f(z) - a}{1 - \bar{a}f(z)};$$

elle est holomorphe et univalente dans  $D$ . Les valeurs de  $f(z)$  sont dans le disque-unité; donc les valeurs de  $\frac{f(z) - a}{1 - \bar{a}f(z)}$  y sont aussi (cf. § 2, proposition 6. 2), et par conséquent la fonction  $F(z)$  a sa partie réelle  $< 0$ . Bien entendu, on a choisi pour  $F(z)$  une détermination du logarithme, ce qui est possible puisque  $D$  est simplement connexe. Considérons la fonction

$$(3.3) \quad g(z) = \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + F(0)},$$

qui est holomorphe et univalente dans  $D$ . On a  $g(0) = 0$ ; de plus,  $|g(z)| < 1$ , en vertu du lemme suivant :

LEMME. Si deux nombres complexes  $u$  et  $v$  satisfont à  $\operatorname{Re}(u) < 0$  et  $\operatorname{Re}(v) < 0$ , alors  $\left| \frac{v - u}{v + u} \right| < 1$ . (La démonstration est laissée au lecteur.)

Ainsi la fonction  $g$  appartient à l'ensemble  $A$  de l'énoncé de la proposition 3. 1. Calculons la dérivée de  $g$  à l'origine :

$$(3.4) \quad g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0) + F(0)}, \quad \text{avec} \quad F'(0) = \left( a - \frac{1}{a} \right) f'(0).$$

On a donc

$$(3.5) \quad \frac{|g'(0)|}{|f'(0)|} = \frac{1 - a\bar{a}}{2|a| \log \left| \frac{1}{a} \right|},$$

et pour montrer que  $|g'(0)| > |f'(0)|$ , il suffit de vérifier l'inégalité

$$(3.6) \quad \frac{1 - t^2}{t} - 2 \log \frac{1}{t} > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < t < 1.$$

Cette vérification est élémentaire : le premier membre est une fonction de  $t$  dont la dérivée est  $< 0$ ; elle est donc strictement décroissante dans l'intervalle  $0 < t \leq 1$ , et comme elle est égale à 0 pour  $t = 1$ , elle est  $> 0$  pour  $0 < t < 1$ .

Nous avons ainsi achevé de démontrer la proposition 3. 1.

#### 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL

Compte tenu de la proposition 3. 1, il nous suffira de prouver qu'il existe une fonction  $f \in A$  pour laquelle la borne supérieure de  $|f'(0)|$  est atteinte.

Soit  $B$  l'ensemble des  $f \in A$  telles que  $|f'(0)| \geq 1$ . L'ensemble  $B$  n'est

*pas vide*, car la fonction  $f(z) = z$  lui appartient. L'ensemble  $B$  est un ensemble *borné* de l'espace vectoriel  $\mathcal{H}(D)$  (cf. chapitre v, § 1, n° 1); en effet, on a  $|f(z)| < 1$  pour tout  $z \in D$  et toute fonction  $f \in B$ . Montrons que  $B$  est un sous-ensemble *fermé* de  $\mathcal{H}(D)$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $D$ , limite (uniformément sur tout compact de  $D$ ) d'une suite de fonctions  $f_n \in B$ . On a

$$f(o) = \lim f_n(o) = o.$$

De plus la dérivée  $f'$  étant limite, uniformément sur tout compact, des dérivées  $f'_n$ , on a à la limite  $|f'(o)| = \lim_n |f'_n(o)| \geq 1$ . Donc la fonction  $f$  n'est pas constante dans  $D$ . Or  $f$  est limite des fonctions univalentes  $f_n$ . Il s'ensuit que  $f$  est univalente (Cf. chapitre v, § 1, proposition 2 2). Puisque  $|f_n(z)| < 1$  pour tout  $z \in D$ , on a la limite  $|f(z)| \leq 1$ ; mais il est impossible que  $|f(z)| = 1$  en un point  $z \in D$ , en vertu du principe du maximum, compte tenu du fait que  $f$  n'est pas constante. En résumé, on vient de prouver que la fonction  $f$  satisfait à toutes les conditions imposées aux fonctions de l'ensemble  $B$ . Autrement dit,  $f \in B$ , et ceci montre que l'ensemble  $B$  est fermé dans  $\mathcal{H}(D)$ .

Ainsi l'ensemble  $B$  est un sous-ensemble borné et fermé de  $\mathcal{H}(D)$ . En vertu du théorème fondamental du chapitre v (§ 4, n° 2), l'ensemble  $B$  est donc *compact*. Or l'application qui à chaque  $f \in B$  associe le nombre réel  $|f'(o)|$  est une application continue, en vertu du chapitre v (§ 1, n° 2, théorème 2). Cette fonction continue sur un espace compact atteint donc sa borne supérieure; ceci achève de prouver le théorème fondamental.

## 4. Notion d'espace analytique; intégration des formes différentielles

### 1. STRUCTURE D'ESPACE ANALYTIQUE

Soit  $X$  un espace topologique *séparé*. Nous supposons que l'on s'est donné un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$ , et, pour chaque  $U_i$ , une fonction  $z_i$  à valeurs complexes définie dans  $U_i$ , et qui réalise un *homéomorphisme* de  $U_i$  sur un ouvert  $A_i$  du plan  $\mathbb{C}$ . On impose à ces fonctions la condition de cohérence suivante :

(1.1) *Quels que soient  $i \in I$  et  $j \in I$  tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , l'application  $f_{ij} = z_i \circ (z_j)^{-1}$  de l'image  $z_j(U_i \cap U_j) \subset A_j$  sur l'image  $z_i(U_i \cap U_j) \subset A_i$  est une transformation holomorphe dont la dérivée est partout  $\neq 0$ . En d'autres termes, on a  $z_i = f_{ij}(z_j)$  dans  $U_i \cap U_j$ ,  $f_{ij}$  étant holomorphe (à dérivée  $\neq 0$ ) dans l'ouvert  $z_j(U_i \cap U_j)$  de  $\mathbb{C}$ .*

Par définition, la donnée du recouvrement ouvert et des fonctions  $z_i$  satisfaisant à la condition (1. 1), définit sur  $X$  une *structure d'espace analytique*. La fonction  $z_i$  s'appelle la *coordonnée locale* dans l'ouvert  $U_i$ . Si un point de  $X$  appartient à plusieurs ouverts  $U_i$ , on a plusieurs coordonnées locales au voisinage de ce point (une pour chaque ouvert); le passage d'une coordonnée locale  $z_j$  à une autre  $z_i$  s'effectue par une transformation *holomorphe*  $f_{ij}$ , à cause de la condition de cohérence (1. 1).

Par exemple, c'est au moyen d'une telle donnée qu'on a déjà défini la *sphère de Riemann* (Chapitre III, § 5, n° 1). Dans ce cas,  $X$  était la sphère-unité de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , et le recouvrement était formé de deux ouverts, chacun d'eux étant le complémentaire de l'un des pôles de la sphère.

*Définition d'une fonction holomorphe.* Soit  $X$  un espace muni, comme ci-dessus, d'une structure d'espace analytique. Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $X$ , à valeurs complexes; pour chaque  $i$ , soit  $f_i$  la fonction définie dans l'ouvert  $A_i \subset \mathbb{C}$  par la condition que  $f = f_i \circ z_i$  dans  $U_i$ . On dit que  $f$  est *holomorphe* si, pour chaque  $i$ , la fonction  $f_i$  est holomorphe dans l'ouvert  $A_i$ . En d'autres termes,  $f$  est holomorphe dans  $X$  si, dans chaque ouvert  $U_i$ ,  $f$  s'exprime comme fonction holomorphe de la coordonnée locale  $z_i$ .

## 2. APPLICATIONS HOLOMORPHES; STRUCTURE INDUITE

*Définition.* Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces munis chacun d'une structure d'espace analytique. On dit qu'une application  $\varphi : X \rightarrow Y$  est une *application holomorphe* si elle est continue et satisfait en outre à la condition suivante : pour tout point  $a \in X$ , soit  $b = \varphi(a)$ , et soit  $w$  une coordonnée locale au voisinage de  $b$  dans l'espace  $Y$ ; alors  $w \circ \varphi$  doit être une fonction holomorphe au voisinage du point  $a$  de  $X$ . Cette condition signifie que  $w \circ \varphi$  s'exprime comme fonction holomorphe d'une coordonnée locale au voisinage de  $a$  dans l'espace  $X$ . Ainsi l'application continue  $\varphi$  est holomorphe si, au voisinage de chaque point  $a \in X$ , une coordonnée locale au voisinage du point transformé  $b = \varphi(a)$  est fonction holomorphe d'une coordonnée locale au voisinage de  $a$ . En vertu de la condition de cohérence (1. 1), la condition précédente est indépendante du choix des coordonnées locales.

Soient  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  trois espaces analytiques, et soient  $\varphi : X \rightarrow Y$ ,  $\psi : Y \rightarrow Z$  deux applications holomorphes. Alors l'application composée  $\psi \circ \varphi$  est une application holomorphe de  $X$  dans  $Z$ . La démonstration est laissée au lecteur.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces analytiques; on appelle *isomorphisme* de  $X$  sur  $Y$  un homéomorphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  qui est holomorphe ainsi que l'homéomorphisme réciproque  $\varphi^{-1}$ . En fait, on verra plus loin (proposition 6. 1)

que si  $\varphi$  est un *homéomorphisme holomorphe*, son application réciproque est automatiquement holomorphe, et par conséquent  $\varphi$  est un isomorphisme.

Considérons, sur le même espace topologique  $X$ , deux structures d'espace analytique : la première est définie par un recouvrement ouvert  $(U_i)$  et des coordonnées locales  $z_i$ , la deuxième est définie par un recouvrement ouvert  $(V_\alpha)$  et des coordonnées locales  $w_\alpha$ . Demandons-nous si l'application identique  $X \rightarrow X$  est un isomorphisme de la première structure d'espace analytique sur la deuxième. En remontant aux définitions, on voit aussitôt qu'une condition nécessaire et suffisante est la suivante : pour tout point  $a \in X$ , pour toute coordonnée locale  $z_i$  de la première structure au voisinage de  $a$ , et pour toute coordonnée locale  $w_\alpha$  de la deuxième structure au voisinage du même point  $a$ ,  $w_\alpha$  s'exprime comme fonction holomorphe de  $z_i$ , et réciproquement  $z_i$  s'exprime comme fonction holomorphe de  $w_\alpha$ . Cette condition peut encore s'exprimer de la manière suivante :

Considérons le recouvrement ouvert de  $X$  formé de tous les  $U_i$  et de tous les  $V_\alpha$ , avec les coordonnées locales  $z_i$  et  $w_\alpha$ ; alors la condition cherchée est que ces données satisfassent à la condition de cohérence (1. 1); autrement dit, ces données doivent définir sur  $X$  une structure d'espace analytique (structure qui sera isomorphe à la fois à la structure définie par les  $U_i$  et les  $z_i$ , et à celle définie par les  $V_\alpha$  et  $w_\alpha$ ). Lorsque deux structures d'espace analytique sur  $X$  satisfont à la condition précédente, nous dirons qu'elles sont *équivalentes*. On appelle *espace analytique* la donnée d'un espace topologique séparé  $X$ , et d'une classe de structures analytiques sur  $X$ , deux à deux équivalentes.

*Définition.* Soit  $X$  un espace muni d'une structure d'espace analytique définie par des  $U_i$  et des  $z_i$ . Soit  $U$  un ouvert de  $X$ ; on appelle *structure analytique induite* sur  $U$  par celle de  $X$ , la structure définie par les ouverts  $U \cap U_i$ , et pour chacun d'eux, par la restriction de la fonction  $z_i$  à  $U \cap U_i$ . En d'autres termes, si  $a \in U$ , une coordonnée locale au voisinage de  $a$  pour la structure induite ne sera pas autre chose qu'une coordonnée locale au voisinage de  $a$  pour la structure donnée sur  $X$ . Ainsi tout ouvert  $U$  d'un espace analytique  $X$  est automatiquement muni d'une structure d'espace analytique.

### 3. EXEMPLES D'ESPACES ANALYTIQUES

Considérons le plan  $\mathbb{C}$  de la variable complexe  $z$ . Prenons le recouvrement formé de l'unique ouvert  $\mathbb{C}$ ,  $z$  étant une coordonnée locale dans  $\mathbb{C}$ . On définit ainsi sur  $\mathbb{C}$  une structure d'espace analytique, puisque la condition de cohérence (1. 1) est trivialement vérifiée. Conformément à la fin du n° 2, tout ouvert  $D \subset \mathbb{C}$  est muni d'une structure d'espace analytique; avec cette définition, les fonctions holomorphes de l'espace analytique

D ne sont pas autre chose que ce que nous avons toujours appelé fonctions holomorphes dans D.

Comme second exemple d'espace analytique, nous avons la sphère de Riemann déjà mentionnée (chapitre III, § 5, n° 1).

Considérons maintenant l'espace-quotient  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  du plan  $\mathbb{C}$  par le sous-groupe additif  $\mathbb{Z}$  des points réels à coordonnées entières. Un point de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  est donc une classe d'équivalence formée de points dont les différences mutuelles sont des nombres entiers. Conformément aux définitions générales de la topologie, on munie  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  de la *topologie-quotient* de la topologie de  $\mathbb{C}$  : un ensemble de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  est *ouvert* si son image réciproque dans  $\mathbb{C}$  (pour l'application canonique  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ) est un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Il revient au même de dire que les ouverts de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  sont les images des ouverts de  $\mathbb{C}$  par l'application canonique  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

Il est bien facile de montrer que la topologie de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  est séparée. Pour définir une structure d'espace analytique sur  $X = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , considérons les ouverts  $V$  de  $\mathbb{C}$  assez petits pour que la restriction à  $V$  de l'application canonique  $p : \mathbb{C} \rightarrow X$  soit injective (par exemple, les ouverts  $V$  de diamètre  $< 1$ ). En désignant par  $z$  la coordonnée dans le plan  $\mathbb{C}$ , considérons le couple formé de l'ouvert  $U = p(V)$  de  $X$  et de la fonction  $z \circ p^{-1}$  définie dans cet ouvert; on va montrer que ces couples définissent sur  $X$  une structure d'espace analytique.

Il suffit de vérifier la condition de cohérence. Soient donc  $V_1$  et  $V_2$  deux ouverts assez petits de  $\mathbb{C}$ , tels que leurs images  $U_1 = p(V_1)$  et  $U_2 = p(V_2)$  se rencontrent; nommons  $p_i$  la restriction de  $p$  à  $V_i$  (pour  $i = 1, 2$ ), et posons

$$V'_i = (p_i)^{-1}(U_1 \cap U_2) \subset V_i \quad (i = 1, 2).$$

La condition de cohérence exprime que l'application  $f_{12} = p_1^{-1} \circ p_2$  de  $V'_2$  sur  $V'_1$  est holomorphe et que sa dérivée est  $\neq 0$ . Or il en est bien ainsi, car si  $z \in V'_2$ ,  $f_{12}(z)$  et  $z$  ont même image dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , donc, au voisinage de chaque point de  $V'_2$ ,  $f_{12}(z) - z$  est une constante entière.

Nous aurons un nouvel exemple d'espace analytique en considérant comme au chapitre V, § 2, n° 5, un sous-groupe discret  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  ayant pour base un système de deux vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  dont le rapport n'est pas réel. Soit  $X$  le quotient  $\mathbb{C}/\Omega$  muni de la topologie-quotient de la topologie de  $\mathbb{C}$ ; les ouverts de  $X$  sont les images des ouverts de  $\mathbb{C}$  par l'application canonique  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ . La topologie de  $X$  est séparée, et sa structure d'espace analytique est définie exactement comme dans l'exemple précédent. Mais ici, *l'espace  $X = \mathbb{C}/\Omega$  est compact* : en effet, considérons un parallélogramme fermé de périodes, soit  $P$ ;  $P$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{C}$ , donc son image par  $p$  est un sous-ensemble compact de  $X$ ; or cette image est  $X$  tout entier, et par suite  $X$  est compact. Nous avons ainsi un exemple d'espace analytique compact, autre que l'exemple déjà connu de la sphère de Riemann.



## 4. PRINCIPE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE; PRINCIPE DU MAXIMUM

Le principe du prolongement analytique (Chapitre I, § 4, n° 3, corollaire 2) s'étend aux fonctions holomorphes sur un espace analytique, et même, plus généralement, aux applications holomorphes d'un espace analytique  $X$  dans un espace analytique  $X'$ . D'une façon précise : soit  $D$  un ouvert non vide d'un espace analytique  $X$  supposé connexe; si deux applications holomorphes  $f$  et  $g$  de  $X$  dans  $X'$  coïncident dans  $D$ , elles coïncident partout dans  $X$ . Pour le prouver, il suffit évidemment de montrer ceci :

**PROPOSITION 4. 1.** *Soient  $f$  et  $g$  deux applications holomorphes d'un espace analytique  $X$  dans un espace analytique  $X'$ ; l'ensemble  $U$  des points de  $X$  au voisinage desquels  $f$  et  $g$  coïncident est ouvert et fermé.*

*Démonstration.* D'après sa définition,  $U$  est ouvert, et il suffit donc de montrer que  $U$  est fermé. Soit  $a$  un point de  $X$  adhérent à  $U$ ; puisque  $f$  et  $g$  sont continues et coïncident dans  $U$ , on a  $f(a) = g(a)$ . Prenons dans  $X$ , au voisinage de  $a$ , une coordonnée locale  $z$  qui s'annule au point  $a$ ; prenons aussi dans  $X'$ , au voisinage de  $f(a)$ , une coordonnée locale  $w$ . Au voisinage de  $a$ , les fonctions  $w \circ f$  et  $w \circ g$  s'expriment comme fonctions holomorphes  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  dans un voisinage  $V$  de  $z = 0$ . D'après le principe classique du prolongement analytique, l'ensemble  $E$  des  $z \in V$  au voisinage desquels  $\varphi$  et  $\psi$  coïncident est fermé; comme le point  $z = 0$  est adhérent à  $E$ , on a  $0 \in E$ ; ainsi  $\varphi$  et  $\psi$  coïncident au voisinage de  $0$ , et par suite  $f$  et  $g$  coïncident au voisinage du point  $a \in X$ .

C.Q.F.D.

**PROPOSITION 4. 2.** *Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un espace analytique  $X$ , supposé connexe. Si  $|f|$  possède un maximum relatif en un point  $a \in X$ , alors la fonction  $f$  est constante (principe du maximum).*

*Démonstration.* Considérons une coordonnée locale  $z$  au voisinage de  $a$ ; la fonction  $f$  s'exprime, au voisinage de  $a$ , comme fonction holomorphe de  $z$ . Puisque  $|f|$  possède un maximum relatif au point  $a$ , la fonction  $f$  est constante au voisinage de  $a$ , en vertu du principe classique du maximum (Cf. Chapitre III, § 2, n° 2, théorème 1). On voit alors par le raisonnement habituel que l'ensemble des points de  $X$  où  $f$  prend la valeur  $f(a)$  est à la fois ouvert et fermé; puisque  $X$  est connexe, cet ensemble est  $X$  tout entier.

C.Q.F.D.

**COROLLAIRE.** *Si  $X$  est un espace analytique connexe et compact, toute fonction holomorphe sur  $X$  est constante.*

En effet,  $|f|$  est une fonction continue sur un espace compact, donc atteint sa borne supérieure; d'après la proposition 4. 2, la fonction  $f$  est donc constante sur  $X$ .

*Exemples.* La sphère de Riemann  $S_2$ , l'espace  $\mathbb{C}/\Omega$  (cf. n° 3) sont des espaces analytiques connexes et compacts. Donc toute fonction holomorphe sur l'un de ces espaces est constante. Si on observe que l'application  $f \rightarrow f \circ p$  établit une correspondance bijective entre les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}/\Omega$  et les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  qui admettent pour périodes les points de  $\Omega$ , on retrouve un résultat déjà établi par une autre méthode : toute fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et doublement périodique est constante (cf. Chapitre III, § 5, n° 5, corollaire à la proposition 5.1).

## 5. FONCTIONS MÉROMORPHES SUR UN ESPACE ANALYTIQUE

*Définition.* Soit  $X$  un espace analytique; on appelle *fonction méromorphe* sur  $X$  une application holomorphe de  $X$  dans la sphère de Riemann  $S_2$ ; une fonction méromorphe n'est donc pas autre chose qu'une fonction continue pouvant prendre la valeur  $\infty$  et qui, au voisinage de chaque point  $a \in X$ , s'exprime comme fonction méromorphe d'une coordonnée locale au voisinage de  $a$ .

Soit à nouveau  $\Omega$  un sous-groupe discret de  $\mathbb{C}$  engendré par deux éléments  $e_1$  et  $e_2$  dont le rapport n'est pas réel. L'application canonique  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  établit évidemment une correspondance bijective entre les fonctions méromorphes sur l'espace analytique  $\mathbb{C}/\Omega$ , et les fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}$  admettant  $\Omega$  comme système de périodes.

## 6. INDICE DE RAMIFICATION D'UNE APPLICATION HOLOMORPHE

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une application *holomorphe* d'un espace analytique  $X$  dans un espace analytique  $Y$ , et soit  $a$  un point de  $X$ . Soit  $z$  une coordonnée locale dans  $X$  au voisinage de  $a$ , et soit  $w$  une coordonnée locale dans  $Y$  au voisinage de  $b = \varphi(a)$ . Puisque  $\varphi$  est holomorphe,  $w(\varphi(x))$ , pour  $x$  voisin de  $a$ , s'exprime comme fonction holomorphe  $f(z)$  de la coordonnée locale  $z$ . Supposons, pour fixer les idées, que  $z$  s'annule au point  $a$ , et que  $w$  s'annule au point  $b$ .

Soit  $p$  l'ordre de multiplicité de la racine 0 de l'équation  $f(z) = 0$ . Il est facile de voir que cet entier  $p$  ne dépend pas du choix de la coordonnée locale  $z$  au voisinage de  $a$ , ni du choix de la coordonnée locale  $w$  au voisinage de  $b$ ; en effet les changements de coordonnées locales s'effectuent par des fonctions holomorphes dont la dérivée est  $\neq 0$ .

L'entier  $p$  ainsi défini s'appelle *l'indice de ramification* de l'application  $\varphi : X \rightarrow Y$  au point  $a \in X$ . D'après le § 1 (n° 1 et 2), si  $p$  est l'indice de ramification, il existe une coordonnée locale  $z$  au voisinage de  $a$  et une coordonnée locale  $w$  au voisinage de  $b$ , telles que la transformation  $\varphi$  s'exprime à l'aide de ces coordonnées locales par la relation  $w = z^p$ . Réciproquement, s'il en est ainsi, l'indice de ramification au point  $a$  est égal à  $p$ .

On voit que, au voisinage de  $a$ , la fonction  $\varphi$  prend exactement  $p$  fois chaque valeur suffisamment voisine de  $b$  et distincte de  $b$  dans  $Y$ . En particulier, pour que la restriction de  $\varphi$  à un voisinage assez petit de  $a$  soit un homéomorphisme de ce voisinage sur son image (autrement dit, pour que  $\varphi$  soit localement univalente au voisinage de  $a$ ), il faut et il suffit que l'indice de ramification  $p$  soit égal à 1; on dit alors que l'application  $\varphi$  est non ramifiée au point  $a$ .

PROPOSITION 6. 1. *Toute application holomorphe et univalente d'un espace analytique  $X$  sur un espace analytique  $Y$  est un isomorphisme.*

En effet, d'après ce qui précède, l'indice de ramification est nécessairement égal à 1 en tout point  $a \in X$ ; si  $b = \varphi(a)$ , l'application réciproque  $\varphi^{-1}$ , au voisinage de  $b$ , est obtenue en exprimant la coordonnée locale  $z$  au voisinage de  $a$  comme fonction holomorphe de la coordonnée locale  $w$  au voisinage de  $b$ . Ceci prouve la proposition.

*Exemple.* Considérons l'application  $z \rightarrow e^{2\pi iz}$ , qui est une application holomorphe du groupe additif  $\mathbb{C}$  sur le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$  des nombres complexes  $\neq 0$ . Par passage au quotient, elle induit une application holomorphe  $\varphi$  de l'espace analytique  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}^*$ . Il est immédiat que l'application  $\varphi$  est holomorphe et univalente. Il s'ensuit que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}^*$ . En fait, c'est aussi un isomorphisme des groupes topologiques  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{C}^*$ , comme on l'a vu au chapitre 1, § 3.

## 7. THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA REPRÉSENTATION CONFORME

Nous énonçons ici sans démonstration un théorème qui généralise au cas des espaces analytiques le théorème fondamental énoncé et démontré au § 3 pour les ouverts du plan  $\mathbb{C}$ .

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Tout espace analytique  $X$  simplement connexe est isomorphe à l'un des trois espaces suivants :*

- 1° la sphère de Riemann  $\mathbb{S}_2$ ;
- 2° le plan  $\mathbb{C}$ ;
- 3° le disque-unité  $|z| < 1$ .

La démonstration de ce théorème est trop difficile pour pouvoir être donnée ici. Observons que, des trois espaces analytiques ci-dessus, seul le premier  $\mathbb{S}_2$  est compact. On en déduit le corollaire :

COROLLAIRE. *Tout espace analytique compact et simplement connexe est isomorphe à la sphère de Riemann. Tout espace analytique non compact et simplement connexe est isomorphe au plan  $\mathbb{C}$  ou au disque-unité (ces deux cas s'excluant mutuellement).*

## 8. INTÉGRATION DES FORMES DIFFÉRENTIELLES ET THÉORÈME DES RÉSIDUS

*Définition d'une forme différentielle holomorphe* sur un espace analytique  $X$  : une telle forme est définie par la donnée, dans chaque ouvert  $U_i$  muni d'une coordonnée locale  $z_i$ , d'une forme différentielle holomorphe

$$\omega_i = f_i(z_i) dz_i,$$

où  $f_i$  est une fonction holomorphe dans l'ouvert  $A_i \subset \mathbb{C}$ , image de  $U_i$  par la coordonnée locale  $z_i$ . Ces données  $\omega_i$  sont de plus astreintes à la condition de cohérence suivante : si  $z_i$  et  $z_j$  sont deux coordonnées locales au voisinage d'un même point  $a \in X$ , la forme différentielle  $\omega_j$  se déduit de la forme différentielle  $\omega_i$  par le changement de variable

$$(8.1) \quad z_i = f_{ij}(z_j),$$

où la transformation (8.1) est celle qui exprime la coordonnée locale  $z_i$  en fonction de la coordonnée locale  $z_j$ . Autrement dit, on doit avoir la relation

$$(8.2) \quad f_i(z_j) = f_i(f_{ij}(z_j)) f'_{ij}(z_j).$$

Nous allons indiquer rapidement, sans démonstration, comment la théorie des formes différentielles holomorphes dans un ouvert du plan  $\mathbb{C}$  se généralise au cas envisagé ici des formes différentielles holomorphes sur un espace analytique.

Soit  $\omega$  une forme différentielle holomorphe sur un espace analytique  $X$ ; au voisinage de chaque point de  $X$ , il existe une *primitive* de  $\omega$ , c'est-à-dire une fonction holomorphe  $g$  telle que  $dg = \omega$ . Une telle primitive est déterminée à l'addition près d'une constante. L'existence *globale* d'une primitive de  $\omega$  n'est pas assurée; toutefois, si l'espace  $X$  est simplement connexe, toute forme différentielle holomorphe sur  $X$  possède une primitive. Dans le cas général où  $X$  n'est pas simplement connexe, l'intégrale de  $\omega$  le long d'un chemin fermé de  $X$  n'est pas toujours nulle; cette intégrale a la même valeur pour deux chemins fermés *homotopes* (au sens du chapitre II, § 1, n° 6). La valeur de l'intégrale le long d'un tel chemin fermé s'appelle alors une *période* de l'intégrale  $\int \omega$ .

Soit  $X$  un espace analytique; on a, au voisinage de chaque point  $a$  de  $X$ , une notion d'*orientation*, car chaque coordonnée locale au voisinage de  $a$  définit un homéomorphisme d'un voisinage de  $a$  sur un ouvert du plan  $\mathbb{C}$ , qui est naturellement orienté; et deux coordonnées locales au voisinage de  $a$  définissent bien la même orientation, puisque le changement de coordonnées locales s'exprime par une transformation holomorphe. De là on peut déduire facilement la notion de « bord orienté d'un compact » contenu

dans  $X$ ; si  $\Gamma$  est le bord orienté d'un compact, alors l'intégrale  $\int_{\Gamma} \omega$  est nulle pour toute forme différentielle holomorphe  $\omega$ .

On va maintenant définir la *notion de résidu* d'une forme différentielle holomorphe. Soit  $E$  un sous-ensemble fermé discret de l'espace analytique  $X$  ( $E$  est donc formé de points *isolés*), et soit  $\omega$  une forme différentielle holomorphe dans le complémentaire de  $E$ . Soit  $a$  un point de  $E$ , et soit  $z$  une coordonnée locale au voisinage de  $a$ , que nous supposons nulle au point  $a$ . Au voisinage de  $a$ , la forme  $\omega$  s'écrit  $f(z) dz$ , où  $f$  est holomorphe au voisinage de 0 sauf peut-être pour  $z = 0$ . Le développement de Laurent de  $f(z)$  montre que la forme  $\omega$ , au voisinage de  $a$ , s'écrit :

$$(8.3) \quad \omega = \omega_1 + \left( \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \right) dz,$$

où  $\omega_1$  est une forme différentielle holomorphe au voisinage de  $a$  ( $a$  inclus). Soit  $\gamma$  un chemin fermé, situé dans un petit voisinage de  $a$ , ne passant pas par  $a$ , et dont l'indice par rapport à  $a$  soit égal à 1 (l'indice d'un chemin fermé se définit en considérant l'image d'un voisinage de  $a$  par une coordonnée locale). Le théorème classique des résidus montre alors que l'on a

$$(8.4) \quad \int_{\gamma} \omega = 2\pi i c_1.$$

Ainsi le coefficient  $c_1$  qui figure au second membre de (8.3) ne dépend pas du choix de la coordonnée locale  $z$ , nulle au point  $a$ . On l'appelle le *résidu* de la forme différentielle  $\omega$  au point  $a$ .

A partir de cette définition, et en raisonnant exactement comme au chapitre III (§ 5, n° 2), on établit le

**THÉORÈME DES RÉSIDUS.** *Si le bord orienté  $\Gamma$  d'un compact  $K$  ne contient aucun des points de l'ensemble fermé discret  $E$  dans le complémentaire duquel la forme différentielle  $\omega$  est holomorphe, l'intégrale  $\int_{\Gamma} \omega$  est égale au produit par  $2\pi i$  de la somme des résidus de  $\omega$  aux points de  $E$  situés dans  $K$ .*

## 5. Surfaces de Riemann

### 1. DÉFINITIONS

*Définition.* Soit  $Y$  un espace analytique; on appelle *surface de Riemann étalée au-dessus de  $Y$*  (ou, plus simplement, *surface de Riemann au-dessus de  $Y$* ) la donnée d'un espace analytique *connexe*  $X$  et d'une application holomorphe *non constante*  $\varphi : X \rightarrow Y$ .

Le plus souvent, on considère le cas où  $Y$  est le plan  $\mathbb{C}$  de la variable complexe, ou la sphère de Riemann  $\mathbb{S}_2$ . Autrement dit, il s'agit de surfaces de Riemann étalées au-dessus du plan ou étalées au-dessus de la sphère.

On a vu au § 4, n° 6 quelle est l'allure de l'application  $\varphi$  au voisinage d'un point quelconque  $a \in X$  : si l'indice de ramification de  $\varphi$  est égal à 1 au point  $a$ ,  $\varphi$  définit un homéomorphisme d'un voisinage de  $a$  sur un voisinage de  $\varphi(a)$ ; si l'indice de ramification de  $\varphi$  au point  $a$  est égal à un entier  $p > 1$ , l'image par  $\varphi$  d'un petit voisinage de  $a$  recouvre  $p$  fois un voisinage de  $\varphi(a)$ . Les points de ramification de  $\varphi$  (points où l'indice de ramification est  $> 1$ ) sont des points isolés de  $X$ . Dans tous les cas, l'application  $\varphi$  est une application ouverte, et l'image réciproque d'un point de  $Y$  est un sous-ensemble discret de  $X$ .

Bien entendu, même lorsqu'il n'y a pas de points de ramification, l'application  $\varphi$  n'est pas nécessairement injective; de plus, lorsqu'il y a des points de ramification, l'image par  $\varphi$  de l'ensemble (discret) des points de ramification n'est pas nécessairement un sous-ensemble discret de  $Y$ ; il se pourrait même qu'une infinité de points de ramification distincts de  $X$  aient la même image dans  $Y$ .

*Définition.* On appelle *surface de Riemann non ramifiée* au-dessus de  $Y$ , la donnée d'une surface de Riemann  $(X, \varphi)$  où l'application  $\varphi$  est non ramifiée, c'est-à-dire possède en chaque point de  $X$  un indice de ramification égal à 1.

Pour définir une surface de Riemann non ramifiée au-dessus de  $Y$ , il suffit de se donner un espace topologique séparé et connexe  $X$  et une application continue  $\varphi$  de  $X$  dans  $Y$ , qui soit localement un homéomorphisme (ceci signifie que tout point de  $X$  possède un voisinage ouvert  $V$  tel que la restriction de  $\varphi$  à  $V$  soit un homéomorphisme de  $V$  sur son image  $\varphi(V)$ ). En effet, l'application  $\varphi$  définit alors, au voisinage de chaque point de  $X$ , une coordonnée locale;  $X$  se trouve ainsi muni d'une structure d'espace analytique, et il est clair que l'application  $\varphi$  est alors une application holomorphe de  $X$  dans  $Y$ .

Un cas particulier des surfaces de Riemann non ramifiées au-dessus de  $Y$  est celui des revêtements de  $Y$  :

*Définition.* On appelle *revêtement* de  $Y$  une surface de Riemann non ramifiée  $(X, \varphi)$  qui satisfait à la condition suivante :

*Pour tout point  $b \in Y$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $b$  dans  $Y$ , tel que l'image réciproque  $\varphi^{-1}(V)$  se compose d'ouverts deux à deux disjoints  $U_i$  de  $X$ , dont chacun est appliqué homéomorphiquement sur  $V$  par l'application  $\varphi$ .*

*Exemple.* Prenons  $Y = \mathbb{C}^*$ , complémentaire de 0 dans le plan  $\mathbb{C}$ . Prenons  $X = \mathbb{C}$ , et soit  $z = e^t$  l'application  $\varphi$  de  $X$  dans  $Y$ . Cette application définit  $X$  comme revêtement de  $Y$ . En effet, soit  $b$  un nombre complexe  $\neq 0$ ; prenons pour  $V$  un disque ouvert de centre  $b$  et de rayon  $< |b|$ .

Chaque détermination de  $\log z$  dans  $V$  est une fonction qui définit un homéomorphisme de  $V$  sur un ouvert du plan  $\mathbb{C}$ . Ces ouverts  $U_i$  sont deux à deux disjoints; leur réunion est  $\varphi^{-1}(V)$ , et la restriction de  $\varphi$  à chaque  $U_i$  est un homéomorphisme de  $U_i$  sur  $V$ .

Dans l'exemple précédent, l'espace  $Y = \mathbb{C}^*$  n'est pas simplement connexe, mais son revêtement  $\mathbb{C}$  est simplement connexe. Nous avons ainsi un exemple d'un espace connexe mais non simplement connexe, et d'un revêtement simplement connexe de cet espace. Signalons sans démonstration le théorème suivant :

**THÉORÈME.** *Tout ouvert connexe du plan  $\mathbb{C}$  (ou, plus généralement, tout espace analytique connexe  $Y$ ) possède un revêtement simplement connexe.*

## 2. FONCTIONS HOLOMORPHES ET FORMES DIFFÉRENTIELLES HOLOMORPHES SUR UNE SURFACE DE RIEMANN

*Définition.* Étant donnée une surface de Riemann  $(X, \varphi)$  au-dessus de  $Y$ , une fonction holomorphe (resp. méromorphe) sur cette surface de Riemann est simplement, par définition, une fonction holomorphe (resp. méromorphe) sur l'espace analytique  $X$ . On définit de même une forme différentielle holomorphe sur une surface de Riemann.

Par exemple, considérons la surface de Riemann envisagée à la fin du n° 1 :  $X = \mathbb{C}$  (la variable complexe s'appelant  $t$ ),  $Y = \mathbb{C}^*$  (la variable complexe  $z$  s'appelant  $z$ ), et l'application  $\varphi$  est définie par  $z = e^t$ . Puisque l'application  $\varphi$  est non ramifiée, on peut prendre, au voisinage de chaque point de  $X$ , la fonction  $e^t = z$  comme coordonnée locale; alors toute fonction holomorphe  $f$  sur la surface de Riemann s'exprime *localement* comme fonction holomorphe de  $z$ . Mais, puisque des points distincts de  $X$  peuvent être appliqués par  $\varphi$  en un même point de  $Y$ ,  $f$  n'est pas, en général, globalement une fonction holomorphe (uniforme) de la variable  $z \neq 0$ . En particulier,  $t$  est une fonction holomorphe sur  $X$ ; au voisinage de chaque point de  $X$ ,  $t$  est l'une des déterminations de  $\log z$ ; mais, considérée comme fonction de  $z$  sur  $\mathbb{C}^*$ ,  $\log z$  n'est pas une fonction uniforme. On peut dire que la considération du revêtement  $\varphi : X \rightarrow Y$  a servi, dans ce cas, à rendre uniforme la fonction  $\log z$  : au lieu de la considérer comme une fonction sur  $\mathbb{C}^*$ , on la considère comme une fonction sur le revêtement simplement connexe  $(X, \varphi)$  de  $\mathbb{C}^*$ .

Nous allons maintenant étudier un autre exemple, qui met en évidence comment on est conduit à introduire une surface de Riemann convenable pour « rendre uniforme » une fonction multiforme (nous ne traiterons pas le cas général). Considérons, dans le plan  $\mathbb{C}$ , la fonction multiforme

$$y = (1 - x^3)^{1/3}.$$

En chaque point  $x$  distinct de  $1, j$  et  $j^2$  (racines cubiques de  $1$ ),  $y$  possède trois valeurs distinctes; si  $x$  prend l'une des valeurs  $1, j$  ou  $j^2$ , les trois valeurs de  $y$  se confondent en une seule, qui est nulle.

On se propose de définir un espace analytique  $X$ , et une application holomorphe  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Considérons, dans le produit  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  des couples  $(x, y)$  de nombres complexes, le sous-ensemble  $X$  formé des couples tels que

$$(2.1) \quad x^3 + y^3 = 1.$$

Munissons  $X$  de la topologie induite par celle du produit  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ; alors  $X$  est un espace topologique séparé. Sur  $X$ , on considère les deux fonctions, notées  $x$  et  $y$ : première et deuxième coordonnée du point  $(x, y)$ . Pour définir sur  $X$  une structure d'espace analytique, on va choisir, au voisinage de chaque point de  $X$ , une « coordonnée locale ». Soit d'abord un point  $(x_0, y_0) \in X$  tel que  $y_0 \neq 0$  (donc  $x_0$  distinct de  $1, j, j^2$ ); alors on prend  $x$  comme coordonnée locale. Ce choix est licite, car la fonction  $x$  définit un homéomorphisme d'un voisinage du point  $(x_0, y_0)$  (dans  $X$ ) sur un voisinage de  $x_0$  (dans  $\mathbb{C}$ ): l'homéomorphisme réciproque associé à  $x$  (voisin de  $x_0$ ) le couple  $(x, y)$ , où  $y = (1 - x^3)^{1/3}$ , la détermination étant celle qui est égale à  $y_0$  pour  $x = x_0$ . Soit maintenant  $(x_0, y_0)$  un point de  $X$  tel que  $y_0 = 0$ ; alors  $x_0 \neq 0$  (en fait,  $x_0$  est l'un des nombres  $1, j, j^2$ ), et on prend  $y$  comme coordonnée locale; ce choix est licite pour une raison analogue à celle donnée ci-dessus (il suffit d'échanger les rôles de  $x$  et de  $y$ ).

On doit encore vérifier que les coordonnées locales ainsi définies satisfont bien à la condition de cohérence voulue [condition (1.1) du § 4]. Autrement dit, on doit vérifier qu'au voisinage d'un point  $(x_0, y_0) \in X$  tel que  $x_0 \neq 0$  et  $y_0 \neq 0$ , la relation (2.1) définit la coordonnée locale  $y$  comme fonction holomorphe de la coordonnée locale  $x$ , et vice-versa. Or il en est bien ainsi car  $(1 - x^3)^{1/3}$  possède une détermination holomorphe qui est égale à  $y_0$  pour  $x = x_0$ ; de même  $(1 - y^3)^{1/3}$  possède une détermination holomorphe qui est égale à  $x_0$  pour  $y = y_0$ .

Ainsi nous avons muni l'espace topologique  $X$  d'une structure d'espace analytique. Pour cette structure, chacune des fonctions  $x$  et  $y$  est une fonction holomorphe sur  $X$ ; vérifions-le pour  $x$ : c'est évident en un point  $(x_0, y_0)$  tel que  $y_0 \neq 0$ , puisque  $x$  est une coordonnée locale; et en un point  $(x_0, y_0)$  tel que  $y_0 = 0$ ,  $y$  est une coordonnée locale, et  $x = (1 - y^3)^{1/3}$  est une fonction holomorphe de  $y$ .

Prenons pour application  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction  $x$ . Alors  $(X, \bar{\varphi})$  est une surface de Riemann au-dessus de  $\mathbb{C}$ . C'est la surface de Riemann que l'on voulait définir. Sur cette surface de Riemann,  $y = (1 - x^3)^{1/3}$  est bien une fonction holomorphe (uniforme). On observera que, au-dessus de chaque point  $x \in \mathbb{C}$ , la surface de Riemann  $X$  possède 3 points: les 3 points  $(x, y)$  tels que  $y = (1 - x^3)^{1/3}$ . On dit que la surface de Riemann a 3 « feuillets »



Mais ces 3 points se confondent en un seul si  $x$  est l'un des points  $1, j, j^2$  de  $\mathbb{C}$ .

On va définir, sur l'espace analytique précédent  $X$ , une *forme différentielle holomorphe*  $\omega$ , comme suit : au voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$  tel que  $y_0 \neq 0$ , on prend

$$\omega = \frac{dx}{y}.$$

Au voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$  tel que  $y_0 = 0$  (donc  $x_0 \neq 0$ ), on prend

$$\omega = -\frac{y dy}{x^2}.$$

(Si  $x_0 \neq 0$  et  $y_0 \neq 0$ , la relation

$$x^2 dx + y^2 dy = 0,$$

conséquence de (2.1), entraîne bien l'égalité des formes différentielles  $\left. \frac{dx}{y} = -\frac{y dy}{x^2} \right)$ . On peut dire que  $\omega$  n'est pas autre chose que la forme différentielle sur  $\mathbb{C}$  :

$$\frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}}$$

rendue holomorphe par l'introduction de la surface de Riemann  $(X, \varphi)$  au-dessus de  $\mathbb{C}$ .

*Exercice.* Montrer que le chemin fermé  $\gamma$  du plan  $\mathbb{C}$ , représenté sur la figure 12, est en réalité l'image, par  $\varphi$ , d'un chemin fermé sur la surface

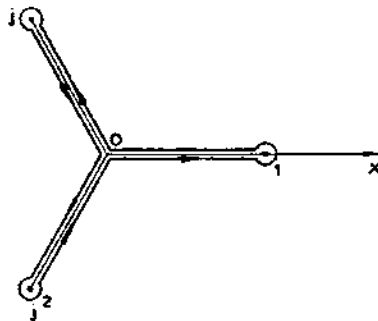


Figure 12

de Riemann  $X$ ; plus précisément, il y a sur  $X$ , *trois* chemins fermés ayant  $\gamma$  pour image. En intégrant sur l'un d'eux la forme différentielle  $\omega$  ci-dessus, on démontrera que l'intégrale réelle  $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}}$  est égale à  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ .

Revenons à la relation (2. 1). Elle va nous conduire à définir une surface de Riemann au-dessus non plus de  $\mathbb{C}$ , mais de la sphère de Riemann  $S_2$ . Considérons pour cela le *plan projectif complexe*  $P_2(\mathbb{C})$ , quotient de

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} - \{0, 0, 0\}$$

par la relation d'équivalence suivante :

$(x, y, z) \sim (x', y', z')$  si  $x, y, z$  sont proportionnels à  $x', y', z'$  (on dit que  $(x, y, z)$  est un système de coordonnées homogènes du point de  $P_2(\mathbb{C})$  qu'il définit, c'est-à-dire de sa classe d'équivalence). Les points de  $P_2(\mathbb{C})$  dont les coordonnées homogènes  $x, y, z$  satisfont à la relation

$$(2. 2) \quad x^3 + y^3 = z^3$$

forment un espace topologique séparé  $X'$ . L'espace  $X$  de tout à l'heure s'identifie à un sous-espace de  $X'$  : à chaque point  $(x, y) \in X$  on associe le point de coordonnées homogènes  $(x, y, 1)$ . L'espace  $X'$  se compose de l'espace  $X$  et de 3 points « à l'infini » : ceux ayant pour coordonnées homogènes  $(1, -1, 0)$ ,  $(j, -1, 0)$  et  $(j^2, -1, 0)$ . On laisse au lecteur le soin de définir sur  $X'$  une structure d'espace analytique qui prolonge celle de  $X$  (il suffira de définir une coordonnée locale au voisinage de chacun des 3 points à l'infini de  $X'$ ), et de définir une application holomorphe  $\varphi' : X' \rightarrow S_2$  qui prolonge  $\varphi$ . On montrera que  $X'$  est un espace analytique compact, et que  $y/z$  est une fonction méromorphe sur  $X'$ , ayant pour pôles les 3 points à l'infini.

### 3. SURFACE DE RIEMANN ATTACHÉE A UNE « COURBE ELLIPTIQUE »

Considérons une relation algébrique entre deux variables complexes  $x$  et  $y$ , de la forme

$$(3. 1) \quad y^2 = 4x^3 - 20a_2x - 28a_4$$

(on utilise à dessein les mêmes notations qu'au chapitre v, § 2, n° 3). On suppose  $a_2$  et  $a_4$  choisis de façon que le polynôme du second membre de (3. 1) ait trois racines distinctes. Désignons ce polynôme par  $P(x)$ ; alors  $P'(x) \neq 0$  pour toute valeur de  $x$  telle que  $P(x) = 0$ , en notant  $P'$  le polynôme dérivé de  $P$ .

On va associer à la « courbe elliptique » (3. 1) une surface de Riemann  $(X, \varphi)$  au-dessus de  $\mathbb{C}$ . Comme espace topologique,  $X$  est le sous-espace de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  formé des couples  $(x, y)$  satisfaisant à (3. 1). Sur cet espace  $X$ , on définit une structure d'espace analytique, comme suit : en un point  $(x_0, y_0) \in X$  tel que  $y_0 \neq 0$ , on prend  $x$  comme « coordonnée locale »; en un point  $(x_0, y_0)$  tels que  $y_0 = 0$ , on a  $P'(x_0) \neq 0$ , donc, d'après le théorème des fonctions implicites, la relation (3. 1) équivaut, au voisinage de  $(x_0, 0)$  à une relation de la forme  $x = f(y)$ , où  $f$  est holomorphe au voisinage de 0, avec  $f(0) = x_0$ . On prendra  $y$  comme coordonnée locale au voisinage d'un tel point  $(x_0, 0)$ .

L'application  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  qui, au couple  $(x, y)$ , associe  $x \in \mathbb{C}$ , est évidemment holomorphe. Donc  $(X, \varphi)$  est une surface de Riemann au-dessus de  $\mathbb{C}$ ; elle a deux

« feuillets », puisqu'à une valeur de  $x$  correspondent deux valeurs de  $y$  en général distinctes (elles sont distinctes si  $P(x) \neq 0$ ). D'autre part, la fonction  $X \rightarrow \mathbb{C}$  qui, au couple  $(x, y)$ , associe  $y$ , est aussi holomorphe sur  $X$ ; nous la noterons simplement  $y$ .

La forme différentielle  $\omega$  définie par  $\omega = dx/y$  au voisinage des points  $(x_0, y_0) \in X$  tels que  $y_0 \neq 0$ , et par  $\omega = \frac{dy}{6x^2 - 10a_2}$  au voisinage des points  $(x_0, 0) \in X$ , est une forme différentielle holomorphe sur  $X$ . Puisque c'est une forme fermée, elle admet une primitive au voisinage de chaque point de  $X$ ; globalement, cette primitive est une fonction *multiforme*  $z$ , holomorphe au voisinage de chaque point de  $X$ . La relation  $dz = \omega$  montre que l'on a

$$(3.2) \quad dx = y dz.$$

Au voisinage de chaque point  $(x_0, y_0) \in X$ , chaque détermination de la fonction  $z$  est une coordonnée locale : en effet, si  $y_0 \neq 0$ ,  $x$  est une coordonnée locale, et  $dz = \frac{1}{y} dx$ ; si  $y_0 = 0$ ,  $y$  est une coordonnée locale, et  $dz = \frac{dy}{6x^2 - 10a_2}$ , le dénominateur n'étant pas nul.

On va maintenant compléter la surface de Riemann  $(X, \varphi)$  en une surface de Riemann  $(X', \varphi')$  au-dessus de la sphère de Riemann  $S_2$ . Pour cela, notons  $(x, y, t)$  les coordonnées homogènes d'un point du plan projectif complexe  $P_2(\mathbb{C})$  (cf. n° 2), et considérons l'ensemble  $X'$  des points de  $P_2(\mathbb{C})$  dont les coordonnées homogènes satisfont à

$$(3.3) \quad y^2 t = 4x^3 - 20a_2 x t^2 - 28a_4 t^3.$$

$X'$  est un espace topologique séparé; si à chaque point  $(x, y) \in X$  on associe le point de  $X'$  de coordonnées homogènes  $(x, y, 1)$ , on identifie  $X$  à un sous-espace de  $X'$ ; le complémentaire  $X' - X$  se compose d'un seul point « à l'infini », le point de coordonnées homogènes  $(0, 1, 0)$ . Au voisinage de ce point, noté  $\infty$ , on peut prendre  $x/y = x'$  comme coordonnée locale, car  $x'$  définit un homéomorphisme d'un voisinage du point  $\infty$  sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$  (en effet, posons  $t/y = t'$ ; la relation (3.3) équivaut à

$$t'^2 = 4x'^3 - 20 a_2 x' t'^2 - 28 a_4 t'^3;$$

au voisinage de  $x' = 0$ ,  $t' = 0$ , le théorème des fonctions implicites donne  $t'$  comme fonction holomorphe de  $x'$  :

$$(3.4) \quad t' = 4x'^3 - 320 a_2 x'^2 + \dots.$$

Le choix de la coordonnée locale  $x'$  au voisinage de  $\infty$  achève de définir sur  $X'$  une structure d'espace analytique (le lecteur vérifiera les conditions de cohérence). Enfin, l'application  $\varphi'$  est définie comme étant égale à  $\varphi$  sur  $X$ , et envoyant le point  $\infty$  de  $X'$  au point à l'infini de  $S_2$ .

La forme différentielle holomorphe  $\omega$ , définie plus haut sur  $X$ , se prolonge en une forme différentielle holomorphe sur  $X'$  : on pose, au voisinage du point  $\infty$ , et en utilisant la coordonnée locale  $x'$  et la fonction holomorphe  $t'$  de  $x'$  définie par (3.4),

$$\omega = t' d(x'/t') = dx' - x' \frac{dt'}{t'} = dx' - \frac{12x'^2 + \dots}{4x'^2 + \dots} dx' = dx' (1 + g(x')),$$

où  $g$  est une fonction holomorphe au voisinage de  $x' = 0$ , nulle pour  $x' = 0$ . La forme  $\omega$  ainsi définie sur l'espace (compact)  $X'$  possède localement une primitive  $z$ ;

c'est une fonction multiforme sur  $X'$ , et qui sert de coordonnée locale au voisinage de chaque point  $X'$ .

Supposons maintenant que les constantes  $a_2$  et  $a_4$  soient déduites d'un groupe discret  $\Omega$  par les relations (5.5) du chapitre V, § 2. Alors la proposition 5.2 du même paragraphe montre que la transformation méromorphe

$$(3.5) \quad x = \tau(z), \quad y = \nu'(z)$$

définit un isomorphisme de l'espace analytique  $\mathbb{C}/\Omega$  sur l'espace analytique  $X'$ . Par l'isomorphisme réciproque,  $z$  est une fonction holomorphe multiforme sur  $X'$ , dont les déterminations (locales) se déduisent les unes des autres par l'addition d'une constante appartenant à  $\Omega$ . On a  $dx = y dz$  à cause de (3.5), et par conséquent  $dz$  (qui est une forme différentielle bien définie sur  $X'$ ) n'est autre que la forme  $\omega$  définie ci-dessus (ce qui justifie la notation  $z$ ).

Abandonnons maintenant l'hypothèse suivant laquelle  $a_2$  et  $a_4$  proviennent d'un groupe discret  $\Omega$  par les formules (5.5) du chapitre V, § 2. La fonction multiforme  $z$  définie sur  $X'$  par la condition que  $dz = \omega$  est encore définie; une analyse plus poussée de la topologie de l'espace  $X'$  permettrait de montrer que les diverses déterminations de  $z$  se déduisent les unes des autres par l'addition de constantes qui forment un sous-groupe discret  $\Omega$  du groupe additif  $\mathbb{C}$ ,  $\Omega$  étant engendré par deux éléments  $e_1$  et  $e_2$  linéairement indépendants sur le corps réel  $\mathbb{R}$ . On peut achever de fixer la fonction multiforme  $z$  en lui imposant d'être nulle (mod.  $\Omega$ ) au point  $x$  de  $X'$ . Introduisons alors la courbe algébrique

$$y^2 = 4x^3 - 20b_2x - 28b_4,$$

où les constantes  $b_2$  et  $b_4$  sont données par

$$b_2 = 3 \sum_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \frac{1}{\omega^3}, \quad b_4 = 5 \sum_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \frac{1}{\omega^5}.$$

Soit  $(X', \xi')$  la surface de Riemann correspondante, au-dessus de  $\mathbb{S}_2$ . La fonction multiforme  $z$  définit une application holomorphe de  $X'$  dans  $\mathbb{C}/\Omega$ , lequel, on vient de le voir, est isomorphe à  $X'$ ; on a donc une application holomorphe  $f: X' \rightarrow X'$ . On peut montrer (ce que nous ne ferons pas ici) que  $f$  est un isomorphisme; donc  $f$  prend, sur  $X'$ , une fois et une seule toute classe de valeurs mod.  $\Omega$ . Donc les coordonnées (non homogènes)  $x$  et  $y$  d'un point de  $X'$  sont des fonctions méromorphes de  $z$ , admettant  $\Omega$  pour groupe de périodes; et comme on voit facilement que  $x$  est une fonction de  $z$  ayant un pôle double pour  $z = 0$ , avec  $1/\xi'^2$  pour partie principale (et n'ayant pas d'autre pôle que ceux de  $\Omega$ ), il s'ensuit que  $x = \mathfrak{p}(z)$ ,  $\mathfrak{p}$  désignant la fonction de Weierstrass attachée au groupe  $\Omega$ , et  $y = \mathfrak{p}'(z)$ . Ainsi, l'isomorphisme  $f: X' \rightarrow X'$  n'est autre que l'application identique, et on a  $b_2 = a_2$ ,  $b_4 = a_4$ . Finalement, on voit que tout couple de constantes  $a_2$  et  $a_4$  telles que le polynôme  $P(x)$ , second membre de (3.1), ait trois racines distinctes, définit un groupe discret  $\Omega$  tel que  $a_2$  et  $a_4$  satisfassent aux relations (5.5) du chapitre V, § 2; de plus, la courbe algébrique (3.1),  $y$  compris son point à l'infini, admet une représentation paramétrique à l'aide des formules (3.5).

#### 4. NOTIONS SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE

On va se borner à envisager le prolongement analytique dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ . Posons le problème :

*Problème.* Supposons donné un ouvert non vide et connexe  $U$  du plan  $\mathbb{C}$  ( $U$  sera considéré comme une surface de Riemann au-dessus de  $\mathbb{C}$ , en

prenant pour  $i : U \rightarrow \mathbb{C}$  l'injection naturelle). Soit donnée une fonction  $f$  holomorphe dans  $U$ . On cherche une surface de Riemann  $(X, \varphi)$  non ramifiée au-dessus de  $\mathbb{C}$ , et un isomorphisme  $j$  de  $U$  sur un ouvert de  $X$ , de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

(i)  $\varphi \circ j = i$  (ce qui permet d'identifier  $U$  à une « sous-surface de Riemann » de  $X$ );

(ii) la fonction  $f$  se prolonge en une fonction holomorphe  $g$  dans  $X$  (« se prolonge » signifie que l'on a  $g \circ j = f$  dans  $U$ );

(iii) la surface de Riemann  $(X, \varphi)$  est « la plus grande possible » parmi celles qui satisfont à (i) et (ii). Cela signifie, d'une façon précise, que si une surface de Riemann non ramifiée  $(X', \varphi')$  au-dessus de  $\mathbb{C}$ , et un isomorphisme  $j'$  de  $U$  sur un ouvert de  $X'$  satisfont à des conditions analogues à (i) et (ii), alors il existe une application holomorphe

$$h : X' \rightarrow X$$

et une seule, telle que

$$(4.1) \quad h \circ j' = j, \quad \varphi \circ h = \varphi'.$$

Avant d'aller plus loin, faisons une observation : dans la condition (ii), la fonction holomorphe  $g$  qui « prolonge »  $f$  est unique, en vertu du « principe du prolongement analytique » (cf. § 4, n° 4). De plus, dans (iii), appelons  $g'$  l'unique fonction holomorphe dans  $X'$  telle, que  $g' \circ j' = f$ ; alors on a nécessairement

$$(4.2) \quad g \circ h = g';$$

en effet,  $g \circ h$  est holomorphe dans  $X'$ , et, dans  $U$ , on a bien  $(g \circ h) \circ j' = f$ , puisque  $h \circ j' = j$  d'après (4.1) et  $g \circ j = f$  par hypothèse.

On exprimera brièvement la propriété (iii) en disant que le triplet  $(X, \varphi, j)$  possède une propriété universelle (sous-entendu : vis-à-vis des triplets satisfaisant à (i) et (ii)).

Le théorème fondamental du prolongement analytique consiste en ceci : étant donné un ouvert connexe  $U \subset \mathbb{C}$  et une fonction  $f$  holomorphe dans  $U$ , le problème précédent possède une solution et une seule. L'unicité ainsi affirmée doit être entendue « à un isomorphisme près ». Nous allons d'abord prouver cette unicité, et préciser en même temps ce que l'on doit entendre par : « à un isomorphisme près ».

*Démonstration de l'unicité.* Supposons que l'on ait deux solutions du problème  $(X, \varphi, j)$  et  $(X_1, \varphi_1, j_1)$ . Puisque par hypothèse  $(X, \varphi, j)$  possède la propriété universelle, il existe une application holomorphe  $h : X_1 \rightarrow X$  et une seule, telle que

$$(4.3) \quad h \circ j_1 = j, \quad \varphi \circ h = \varphi_1.$$

Pour la même raison, il existe une application holomorphe  $h_1 : X \rightarrow X_1$  et une seule, telle que

$$h_1 \circ j = j_1, \quad \varphi_1 \circ h_1 = \varphi.$$

Considérons l'application  $h \circ h_1$  de  $X$  dans lui-même; c'est une application  $k$  telle que

$$k \circ j = j, \quad \varphi \circ k = \varphi;$$

or, d'après la propriété universelle, il existe *une seule* application holomorphe ayant ces propriétés, et comme l'application identique de  $X$  possède ces propriétés, il s'ensuit que  $k = h \circ h_1$  est l'application identique de  $X$ . Pour la même raison,  $h_1 \circ h$  est l'application identique de  $X_1$ . Ceci entraîne que  $h$  et  $h_1$  sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Ainsi, deux solutions quelconques du problème se déduisent l'une de l'autre par un isomorphisme  $h$  satisfaisant à (4. 3); c'est dans ce sens que l'on peut dire que la solution du problème (s'il y en a) est *unique à un isomorphisme près*.

Il reste à prouver l'existence d'une solution, ce qui est plus délicat. Le lecteur non entraîné est invité à laisser de côté la démonstration que nous allons donner maintenant.

Soit  $Z$  l'ensemble des couples  $(z_0, S)$  formés d'un point  $z_0 \in \mathbb{C}$  et d'une série entière (à une variable)  $S$  dont le rayon de convergence n'est pas nul. On définit sur  $Z$  la topologie suivante : à chaque couple  $(V, F)$  formé d'un ouvert  $V \subset \mathbb{C}$  et d'une fonction  $F$  holomorphe dans  $V$ , on associe l'ensemble  $W(V, F)$  des couples  $(z_0, S)$  où  $z_0 \in V$  et où  $S$  est la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  telle que  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  soit le développement en série entière de  $F$  au voisinage de  $z_0$ . Par définition, les ensembles  $W(V, F)$  forment une *base d'ouverts* pour la topologie que l'on veut définir sur  $Z$  : tout ouvert de  $Z$  est une réunion d'ensembles de la forme  $W(V, F)$ , et réciproquement toute réunion d'ensembles de la forme  $W(V, F)$  est un ouvert. On démontre facilement que l'intersection de deux ouverts est un ouvert; on a donc bien défini une topologie sur  $Z$ . Cette topologie est *séparée*; que deux points distincts  $(z_0, S)$  et  $(z'_0, S')$  aient des voisinages ouverts disjoints est évident si  $z_0 \neq z'_0$ ; et si  $z_0 = z'_0$  et  $S \neq S'$ , l'ensemble des points (assez voisins de  $z_0$ ) au voisinage desquels les fonctions holomorphes définies par les séries entières distinctes  $S$  et  $S'$  coïncident est *vide*, à cause du « principe du prolongement analytique ».

À chaque couple  $(z_0, S)$  associons le point  $z_0 \in \mathbb{C}$ ; on définit ainsi une application  $p : Z \rightarrow \mathbb{C}$ , qui est *localement un homéomorphisme* (i.e. : tout point de  $Z$  possède un voisinage tel que la restriction de  $p$  à ce voisinage soit un homéomorphisme sur son image) : cela résulte aussitôt de la définition de la topologie de  $Z$ . En utilisant  $p$  comme *coordonnée locale* au voisinage de chaque point de l'espace  $Z$ , on définit sur  $Z$  une structure d'*espace analytique*. Pour cette structure, l'application  $p$  est holomorphe; donc  $(Z, p)$  serait une surface de Riemann au-dessus de  $\mathbb{C}$  si  $Z$  était connexe (on verra que ce n'est pas le cas).

Définissons une fonction  $G$  dans l'espace  $Z$  comme suit : la valeur de  $G$  en un point  $(z_0, S) \in Z$  est, par définition, le terme constant de la série entière  $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ; c'est aussi la valeur, au point  $z_0$ , de la fonction holomorphe  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  définie

au voisinage de  $z_0$ . La définition de la topologie de  $Z$  montre facilement que la fonction  $G$  ainsi définie sur l'espace  $Z$  est holomorphe; en fait, si on l'exprime, au voisinage de  $(z_0, S)$ , comme fonction de la coordonnée locale  $z$  (voisine de  $z_0$ ), on trouve que la fonction  $G$  admet le développement en série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ , où  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  est précisément la série  $S$ .

Jusqu'à présent, on n'a pas encore utilisé la donnée de l'ouvert non vide et connexe  $U$ , et de la fonction  $f$  holomorphe dans  $U$ . On va maintenant s'en servir. Considérons  $W(U, f)$  : c'est, par définition, un ouvert (non vide et connexe) de l'espace analytique  $Z$ ; et la restriction de l'application  $p : Z \rightarrow \mathbb{C}$  à cet ouvert  $W(U, f)$  est un isomorphisme de  $W(U, f)$  sur l'ouvert  $U \subset \mathbb{C}$ . Soit  $j$  l'isomorphisme réciproque. L'application composée  $G \circ j$  n'est autre que  $f$ . Soit  $X$  la composante connexe de  $Z$  qui contient l'ouvert  $j(U)$ ; et soit  $\varphi$  la restriction de  $p$  à  $X$ ; soit enfin  $g$  la restriction de  $G$  à  $X$ .

Puisque  $p$  est localement un homéomorphisme, il en est de même de  $\varphi$ ; donc  $(X, \varphi)$  est bien une surface de Riemann non ramifiée au-dessus de  $\mathbb{C}$ . Pour montrer que  $(X, \varphi)$  et l'isomorphisme  $j$  satisfont aux conditions du problème, il reste à vérifier qu'ils satisfont aux conditions (i), (ii) et (iii). La condition (i) résulte trivialement de la définition de  $j$ . La condition (ii) est vraie, parce que  $g$  est la restriction de  $G$  à  $X$ , et que  $G \circ j = f$ , comme on l'a vu. Montrons (iii) : soient  $(X', \varphi')$  et  $j'$  comme dans (iii), avec une fonction  $g'$  holomorphe dans  $X'$  et telle que  $g' \circ j' = f$  dans  $U$ ; définissons une application  $k$  de  $X'$  dans  $Z$ , en associant à tout point  $x'_0 \in X'$  le couple  $(\varphi'(x'_0), S)$ , où  $S$  désigne la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$  telle que  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$

soit le développement, au voisinage de  $z_0 = \varphi'(x'_0)$ , de la fonction holomorphe  $\lambda(z)$  telle que  $\lambda(\varphi'(x')) = g'(x')$  au voisinage de  $x'_0$  (ici intervient l'hypothèse que la surface de Riemann  $(X', \varphi')$  est non ramifiée, et que par suite  $\varphi'(x')$  est une coordonnée locale sur  $X'$  au voisinage de  $x'_0$ ). L'application  $k$  qu'on vient de définir est holomorphe dans  $X'$ . Puisque l'espace  $X'$  est connexe (d'après la définition d'une surface de Riemann), son image par  $k$  est connexe; et comme cette image contient évidemment l'ouvert  $j(U)$ , cette image est contenue dans la composante connexe  $X$  de  $Z$ . Donc  $k$  induit une application holomorphe  $h$  de  $X'$  dans  $X$ , et on vérifie facilement que  $h$  satisfait aux conditions (4. 1). Pour achever la démonstration, il reste à prouver que toute application holomorphe  $h : X' \rightarrow X$  satisfaisant à (4. 1) coïncide avec la précédente; or elle doit coïncider avec elle dans l'ouvert non vide  $j'(U)$ , et par suite la coïncidence a lieu dans tout l'espace connexe  $X'$ , en vertu du principe du prolongement analytique (§ 4, n° 4).

*Remarques diverses.* On a ainsi obtenu une « plus grande » surface de Riemann non ramifiée au-dessus de  $\mathbb{C}$ , contenant l'ouvert donné  $U$ , et dans laquelle la fonction donnée  $f$  se prolonge en une fonction holomorphe. L'idée la plus simple aurait consisté à chercher un « plus grand ouvert » connexe  $V$  contenant  $U$ , et dans lequel  $f$  se laisse prolonger en une fonction holomorphe. Mais un tel problème n'a pas de solution en général, et c'est ce qui rend indispensable la considération des surfaces de Riemann non ramifiées, au lieu de considérer simplement des ouverts de  $\mathbb{C}$ . Voici un exemple qui montre qu'il n'existe pas de plus grand ouvert connexe  $V$  contenant  $U$ , et dans lequel  $f$  soit prolongeable : on prend pour  $U$  un disque ouvert de  $\mathbb{C}$  ne contenant pas 0, et pour fonction  $f$  une détermination de  $\log z$  dans  $U$ ; soit  $U'$  le symétrique de  $U$  par rapport à 0; il est facile de construire deux ouverts

simplement connexes  $V_1$  et  $V_2$ , contenant chacun  $U$  et  $U'$  (voir figure 13), et tels que si on prolonge dans  $V_1$  (resp. dans  $V_2$ ) la détermination considérée de  $\log z$  dans  $U$ , on obtienne, par restriction à  $U'$ , des déterminations

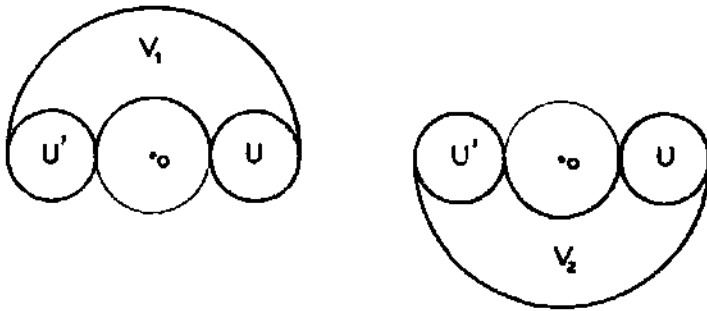


Figure 13

différentes. Il ne peut donc pas exister d'ouvert  $V$  contenant  $V_1$  et  $V_2$ , et dans lequel la détermination de  $\log z$  dans  $U$  puisse se prolonger. Il n'y a donc pas de plus grand ouvert contenant  $U$  et dans lequel le prolongement est possible.

Soit toujours  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $U \subset \mathbb{C}$ , et soit  $z_0 \in U$ . Considérons un chemin  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  d'origine  $z_0$  et d'extrémité  $z_1$ ; on ne suppose pas que l'image de  $\gamma$  soit contenue dans  $U$ . ( $I$  désigne le segment  $[0, 1]$ ). Soit d'autre part un triplet  $(X, \varphi, g)$  satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii). S'il existe une application continue  $h : I \rightarrow X$  telle que  $\varphi \circ h = \gamma$  et  $h(0) = j(z_0)$ , une telle  $h$  est unique (démonstration facile); on l'appelle un *relèvement* du chemin  $\gamma$  dans la surface de Riemann  $(X, \varphi)$ . Au voisinage du point  $h(1) \in X$ , la fonction  $g$  s'exprime comme fonction holomorphe de  $z = \varphi(x)$  au voisinage du point  $z_1$ ; on dit que cette fonction holomorphe de  $z$  a été obtenue par *prolongement analytique de la fonction holomorphe  $f$  le long du chemin  $\gamma$*  (d'origine  $z_0$  et d'extrémité  $z_1$ ).

La théorie précédente du prolongement analytique admet diverses généralisations. Par exemple, au lieu de prolonger sur une surface de Riemann non ramifiée au-dessus de  $\mathbb{C}$ , on peut prolonger sur une surface de Riemann non ramifiée au-dessus de la *sphère de Riemann*; les raisonnements sont analogues. On pourrait aussi considérer des surfaces de Riemann non astreintes à être non ramifiées, en leur imposant des conditions analogues à (i), (ii), et (iii); on peut alors montrer que le problème ainsi posé possède encore une solution, unique « à un isomorphisme près ».

## Exercices

1. Soit  $D$  un ouvert simplement connexe du plan  $\mathbb{C}$ , distinct de  $\mathbb{C}$ , et soit  $a \in D$ . Étant donné un nombre complexe  $b$  tel que  $|b| < 1$ , et un nombre



réel  $\alpha$ , montrer qu'il existe *une seule* fonction holomorphe  $f(z)$  qui définisse un isomorphisme de  $D$  sur le disque unité et satisfasse à

$$(i) f(a) = b, \quad (ii) \arg f'(a) = \alpha.$$

2. Soit  $D$  l'ouvert connexe ayant pour frontière la réunion de deux cercles  $C_1, C_2$  sans point commun, tels que  $C_1$  soit contenu dans l'intérieur de  $C_2$ . Montrer qu'il existe une transformation homographique qui applique  $D$  sur une couronne :  $r < |z| < 1$  (où  $r$  est un nombre convenable  $> 0$  et  $< 1$ ).

3. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe et univalente dans le disque unité  $B : |z| < 1$ , et soit  $D = f(B)$  l'image de  $B$  par  $f$ . De même, soit  $D_r$  l'image par  $f$  du disque ouvert  $B_r : |z| < r, 0 < r < 1$ .

(i) Montrer que, si  $h$  est un automorphisme de  $D$  laissant fixe le point  $f(0)$ , on a

$$h(D_r) \subset D_r, \text{ pour } 0 < r < 1.$$

(Appliquer le lemme de Schwarz à la fonction  $f^{-1}(h(f(z)))$ .)

(ii) Montrer que, si  $D$  est étoilé par rapport au point  $f(0)$  (voir chapitre II, § 1, n° 7 pour la définition), alors  $D_r$  est aussi étoilé par rapport au point  $f(0)$ , pour  $0 < r < 1$ . (Se ramener au cas où  $f(0) = 0$  et considérer la fonction  $f^{-1}(\lambda f(z))$  pour  $0 < \lambda < 1$ .)

(iii) Supposons maintenant que  $D$  soit convexe. Montrer que  $D_r$  est aussi convexe pour  $0 < r < 1$ . Si  $E$  est un disque ouvert tel que  $\bar{E} \subset B$ , son image  $f(E)$  est-elle convexe?

(Étant donné  $0 < \lambda < 1$ , et  $z_1, z_2 \in B$ , considérer la fonction

$$g_\lambda(z) = (1 - \lambda)f(\lambda z_1/z_2) + \lambda f(z),$$

si  $|z_1| \leq |z_2| \neq 0$ . Pour la seconde question, montrer qu'il existe un automorphisme  $\varphi$  de  $B$  tel que  $\varphi(E) = B_r$ , avec  $0 < r < 1$ , et considérer la fonction  $f \circ \varphi^{-1}$ .)

4. Soit  $w = f(z)$  une fonction holomorphe et univalente dans le disque unité  $|z| < 1$ , et soit  $\Gamma$  l'image par  $f$  du cercle  $|z| = r, 0 < r < 1$ . Montrer que le rayon de courbure  $\rho$  de  $\Gamma$  en un point  $f(a), |a| = r$ , est donné par la formule suivante :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{Re}(a f''(a) / f'(a)) + 1}{|a f'(a)|}$$

(Remarquer que, si  $f(re^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$ , on a

$$\frac{u'v'' - u''v'}{u'^2 + v'^2} = \operatorname{Im} \left( \frac{u'' + iv''}{u' + iv'} \right),$$

où  $u'$ ,  $u''$ , etc., désignent les dérivées par rapport à  $\theta$ .)

5. Soient  $a$  un nombre complexe,  $r$  un nombre  $> 0$ , et soient  $z_1, z_2$  deux points se correspondant dans l'inversion de pôle  $a$  et de puissance  $r$ . Soit  $S$  une transformation homographique n'ayant pas de pôle sur le cercle  $C$  d'équation  $|z - a| = r$ . Montrer que  $S(z_1)$  et  $S(z_2)$  se correspondent dans une inversion, dont on déterminera le pôle et la puissance. Si  $S$  possède un pôle sur  $C$ , montrer que  $S(z_1)$  et  $S(z_2)$  se correspondent dans la symétrie par rapport à la droite  $S(C)$ .

6. Soit  $C$  (resp.  $\Gamma$ ) un cercle dans le plan de la variable complexe  $z$  (resp.  $w$ ) défini par  $|z - a| = r$  (resp.  $|w - z| = \rho$ ). Soit  $D$  (resp.  $\Delta$ ) un ouvert connexe du plan de  $z$  (resp.  $w$ ) satisfaisant aux conditions suivantes :

(i)  $C_0 = D \cap C$  (resp.  $\Gamma_0 = \Delta \cap \Gamma$ ) est un arc (ouvert) non vide de  $C$  (resp. de  $\Gamma$ );

(ii)  $D_{\pm} = J_r(D)$  (resp.  $\Delta_{\pm} = J_r(\Delta)$ ),

où  $J_r$  (resp.  $J_r$ ) désigne l'inversion par rapport au cercle  $C$  (resp.  $\Gamma$ ), et  $D_{\pm}$  (resp.  $\Gamma_{\pm}$ ) l'ensemble des  $z \in D$  (resp. des  $w \in \Delta$ ) tels que  $|z - a| \gtrless r$  (resp.  $|w - z| \gtrless \rho$ ). Soit de plus  $f$  une fonction définie et continue dans  $D_+ \cup C_0$ , à valeurs dans  $\Delta_+ \cup \Gamma_0$ , telle que :

(iii)  $f$  soit holomorphe dans  $D_+$  et applique  $D_+$  dans  $\Delta_+$ ;

(iv)  $f$  applique  $C_0$  dans  $\Gamma_0$ .

Montrer que, sous ces hypothèses,  $f$  peut être prolongée, d'une seule façon, en une fonction  $g$  holomorphe dans  $D$ , qui applique  $D$  dans  $\Delta$ . (Se ramener, en utilisant l'exercice 5, au cas où  $C_0$  (resp.  $\Gamma_0$ ) est contenu dans l'axe réel, et utiliser le principe de symétrie de Schwarz, Chapitre II, § 2, n° g)).

On remplace maintenant les hypothèses (iii) et (iv) par les hypothèses plus restrictives :

(iii')  $f$  définit un isomorphisme de  $D_+$  sur  $\Delta_+$ ;

(iv')  $f$  applique  $C_0$  sur  $\Gamma$ .

Montrer alors que le prolongement  $g$  est un isomorphisme de  $D$  sur  $\Gamma$ . (On devra notamment montrer que  $f$  est univalente, et pour cela que  $f$  prend des valeurs distinctes en des points distincts de  $C_0$ ; ceci se prouvera par l'absurde, en utilisant la proposition 4.2 du Chap. III, § 5.)

7. Soient  $a, r$  deux nombres réels tels que  $r > a > 0$ . Trouver une fonction  $w = f(z)$  qui définit un isomorphisme de l'intérieur  $D$  de l'ovale de Cassini  $|z^2 - a^2| < r^2$  sur le disque unité  $B : |w| < 1$ , en conservant les axes de symétrie. (D'après le principe de symétrie, il suffit de trouver une fonction  $f$  définissant un isomorphisme de la moitié à droite  $D^+$  définie par

$$|z^2 - a^2| < r^2, \operatorname{Re}(z) > 0,$$

sur la moitié à droite du disque unité  $B^+$  définie par

$$|w| < 1, \operatorname{Re}(w) > 0,$$

prenant des valeurs réelles sur l'axe réel, et appliquant le segment  $iy, y_2 \leq r^2 - a^2$ , du plan  $z$  sur le segment  $iv, v \leq 1$ , du plan  $w$ . Pour cela, considérer d'abord la transformation  $\zeta = z^2$ , puis une transformation homographique  $Z = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$  transformant le cercle  $|\zeta - a^2| = r^2$  dans le cercle unité  $|Z| = 1$ , et le segment  $a^2 - r^2 \leq \operatorname{Re}(\zeta) \leq 0, \operatorname{Im}(\zeta) = 0$  sur le segment  $-1 \leq \operatorname{Re}(Z) \leq 0, \operatorname{Im}(Z) = 0$ ; et finalement une détermination convenable de la fonction  $w = Z^{1/2}$ .)

8. Considérons la fonction  $f(z)$  définie dans le demi-plan supérieur  $P^+$  :  $\operatorname{Im}(z) > 0$ , par l'intégrale prise le long d'un chemin dans  $P^+$  reliant  $0$  à  $z$

$$u - f(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

où  $k$  est une constante réelle telle que  $0 < k < 1$ ; on prend la détermination uniforme du radical égale à 1 pour  $t = 0$ . Montrer que  $f(z)$  peut se prolonger en une fonction continue dans le demi-plan fermé  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ . Posons

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \quad (t \text{ réel}).$$

Montrer que la fonction  $f(z)$  ainsi prolongée définit un isomorphisme du demi-plan  $P^+$  sur le rectangle (ouvert) ayant pour sommets les points :  $-K, K, K + iK', -K + iK'$ , et applique l'axe réel sur le périmètre de ce rectangle. Préciser les points correspondant aux sommets.

Montrer que l'on peut prolonger la transformation réciproque  $z = F u$  en une fonction méromorphe, doublement périodique de périodes  $4K, 2iK'$ , dans le plan de la variable  $u$ . Préciser ses zéros et ses pôles, et en déduire qu'il existe une constante  $A$  telle que l'on ait

$$F(u) = A\tilde{\varepsilon}_1(u/2K)/\tilde{\varepsilon}_0(u/2K),$$

où  $\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_1$  désignent les fonctions considérées dans l'exercice 3 du chapitre v, avec  $\tau = iK'/K$ .

# Systèmes différentiels holomorphes

## 1. Théorème d'existence et d'unicité

### 1. POSITION DU PROBLÈME

Soit  $k$  un entier  $\geq 1$ . Supposons données  $k$  fonctions holomorphes de  $k + 1$  variables complexes :

$$f_i(x, y_1, \dots, y_k), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Ces fonctions sont supposées *holomorphes* au voisinage d'un point  $(a, b_1, \dots, b_k)$ . On considère le système différentiel

$$(1.1) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_k), \quad 1 \leq i \leq k.$$

On cherche les systèmes de  $k$  fonctions  $y_i = \varphi_i(x)$  ( $i = 1, \dots, k$ ), holomorphes au voisinage du point  $x = a$ , telles que  $\varphi_i(a) = b_i$ , et satisfaisant au système (1.1). Cette dernière condition exprime que les dérivées  $\varphi_i'(x)$  satisfont à

$$(1.2) \quad \varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)).$$

**THÉORÈME 1.** *Le problème précédent possède une solution et une seule.*

Ce théorème va être démontré dans les trois numéros suivants.

### 2. CAS $k = 1$ : PARTIE FORMELLE

Nous avons une seule fonction inconnue  $y$  de la variable  $x$ , l'équation différentielle à résoudre étant

$$(2.1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

$f(x, y)$  est une fonction donnée, holomorphe au voisinage du point  $(a, b)$ . Pour simplifier, nous supposons désormais  $a = 0, b = 0$ ; on peut toujours se ramener à ce cas au moyen d'une translation. Soit

$$(2.2) \quad f(x, y) = \sum_{p, q \geq 0} c_{p, q} x^p y^q$$

le développement de Taylor de  $f$ , qui converge par hypothèse au voisinage de l'origine. La fonction inconnue  $y = \varphi(x)$  admet le développement de Taylor

$$(2.3) \quad \varphi(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n,$$

dont les coefficients  $a_n$  sont précisément à déterminer. Le coefficient  $a_0$  est nul, puisqu'on exige  $\varphi(0) = 0$ .

Dans une première étape, on va se borner à chercher une série entière formelle (2.3) qui satisfasse formellement à l'équation différentielle (2.1); autrement dit,  $\varphi'(x)$  désignant la dérivée formelle de la série formelle  $\varphi(x)$ , on doit avoir

$$(2.4) \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

où le second membre est obtenu par substitution à  $y$  de la série formelle  $\varphi(x)$  (sans terme constant).

**PROPOSITION 2.1.** *Étant donné la série formelle (2.2), il existe une série formelle (2.3) et une seule qui satisfasse à (2.4).*

On va maintenant démontrer cette proposition; on se préoccupera seulement plus tard de la question de savoir si la série (2.3) ainsi obtenue est effectivement convergente au voisinage de 0.

Identifions les séries formelles en  $x$  des deux membres de (2.4); en égalant les coefficients de  $x^n$  dans les deux membres on obtient :

$$(2.5) \quad (n+1) a_{n+1} = P_{n+1}(a_1, \dots, a_n; c_{p, q}),$$

où  $P_{n+1}$  est un polynôme par rapport aux lettres  $a_1, \dots, a_n$  et à un nombre fini des lettres  $c_{p, q}$ , polynôme dont les coefficients sont des entiers  $\geq 0$ . Il n'est pas utile d'explicitier davantage ce polynôme. Par exemple :

$$a_1 = c_{0,0}, \quad 2a_2 = c_{1,0} + c_{0,1}a_1.$$

Des relations (2.5) on déduit, par récurrence sur  $n$ ,

$$(2.6) \quad a_n = Q_n(c_{p, q}),$$

où les  $Q_n$  sont des polynômes, à coefficients rationnels  $\geq 0$ , par rapport aux diverses variables  $c_{p, q}$  (chaque polynôme  $Q_n$  ne dépendant que d'un

nombre fini de ces variables). Il importe de bien observer que les polynômes  $Q_n$  sont définis une fois pour toutes. Les premiers polynômes  $Q_n$  sont les suivants :

$$Q_1 = \epsilon_{0,0}, \quad Q_2 = \frac{1}{2} (\epsilon_{1,0} + \epsilon_{0,1}\epsilon_{0,0}).$$

Les relations (2.6) étant nécessaires et suffisantes pour que la relation formelle (2.4) soit vérifiée, la proposition 2.1 se trouve démontrée.

### 3. CAS $k = 1$ : QUESTIONS DE CONVERGENCE

On suppose maintenant que la série entière du second membre de (2.2) est convergente au voisinage de  $(0, 0)$ . On se propose de démontrer que la série entière (2.3), dont les coefficients sont définis par les formules (2.6), possède alors un rayon de convergence non nul. Pour cela, on va appliquer la méthode dite des *séries majorantes*.

*Définition.* On dit qu'une série entière formelle

$$(3.1) \quad F(x, y) = \sum_{p, q \geq 0} C_{p, q} x^p y^q$$

est une *série majorante* de la série (2.2), si les coefficients  $C_{p, q}$  sont  $\geq 0$  et satisfont aux inégalités

$$|c_{p, q}| \leq C_{p, q}.$$

On définit de même une série majorante

$$(3.2) \quad \Phi(x) = \sum_{n \geq 1} A_n x^n$$

de la série formelle (2.3).

**PROPOSITION 3.1.** *Soit  $F(x, y)$  une série majorante de la série  $f(x, y)$ . Soit  $\Phi(x)$  la série formelle, sans terme constant, unique solution formelle de l'équation différentielle*

$$(3.3) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y).$$

*Alors  $\Phi$  est une série majorante de  $\varphi$ .*

*Démonstration.* Les coefficients  $A_n$  de la série  $\Phi$  sont donnés, comme on l'a vu, par les formules

$$(3.4) \quad A_n = Q_n(C_{p, q});$$

puisque les polynômes  $Q_n$  ont leurs coefficients  $\geq 0$ , les inégalités  $|c_{p,q}| \leq C_{p,q}$ , et les inégalités classiques relatives à la valeur absolue d'une somme ou d'un produit, montrent aussitôt que  $|a_n| \leq A_n$ . Ceci prouve la proposition.

Pour démontrer que la série (2. 3) a un rayon de convergence non nul lorsque la série donnée (2. 2) converge au voisinage de l'origine, on va procéder comme suit : on va expliciter une série majorante  $F$  de la série  $f$ , puis on calculera explicitement la solution formelle  $\Phi$  de l'équation différentielle (3. 3), et on vérifiera directement que la série  $\Phi$  possède un rayon de convergence  $\neq 0$ . Comme le rayon de convergence de la série  $\varphi$  est au moins égal au rayon de convergence de la série majorante  $\Phi$ , il s'en suivra bien que le rayon de convergence de  $\varphi$  est  $\neq 0$ , et le théorème 1 (n° 1) sera entièrement démontré dans le cas où  $k = 1$ .

Par hypothèse, la série (2. 2) converge dans un voisinage de l'ensemble

$$(3. 5) \quad |x| \leq r, \quad |y| \leq r,$$

où  $r$  est un nombre  $> 0$ . Soit  $M$  la borne supérieure de  $|f(x, y)|$  sur l'ensemble (3. 5). D'après les inégalités de Cauchy (chapitre IV, § 5, formule (4. 2)), on a

$$(3. 6) \quad |c_{p,q}| \leq \frac{M}{r^{p+q}}.$$

Posons

$$(3. 7) \quad C_{p,q} = \frac{M}{r^{p+q}};$$

les  $C_{p,q}$  sont les coefficients d'une série entière  $F(x, y)$  qui est une série majorante de  $f(x, y)$ . On calcule immédiatement la somme de la série  $F$ , qui est une série géométrique double :

$$(3. 8) \quad F(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{r}\right)} \quad \text{pour } |x| < r, |y| < r.$$

L'équation différentielle (3. 3) est une équation à variables séparées :

$$(3. 9) \quad \left(1 - \frac{y}{r}\right) dy = \frac{M dx}{1 - \frac{x}{r}}.$$

On l'intègre par quadrature : la solution  $y$  qui s'annule pour  $x = 0$  est donnée par la relation

$$(3. 10) \quad \left(1 - \frac{y}{r}\right)^2 - 1 = 2M \log \left(1 - \frac{x}{r}\right), \quad |x| < r,$$

où, dans le second membre, on prend la détermination du logarithme qui est nulle pour  $x = 0$ . De (3. 10) on tire

$$(3. 11) \quad y - r \left( 1 - \sqrt{1 + 2M \log \left( 1 - \frac{x}{r} \right)} \right),$$

où, dans le second membre, on prend la détermination du radical qui est égale à 1 pour  $x = 0$ . Le second membre de (3. 11) n'est autre que la fonction  $\Phi(x)$ , solution de l'équation différentielle (3. 3) au voisinage de  $x = 0$ . Or il est clair que cette fonction est holomorphe au voisinage de  $x = 0$ , et que son développement en série entière admet donc un rayon de convergence  $\neq 0$ . En fait, il est facile de voir que le rayon de convergence du second membre de (3. 11) est égal à

$$r \left( 1 - e^{-\frac{1}{2M}} \right).$$

La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée dans le cas où  $k = 1$ .

#### 4. CAS OÙ $k$ EST QUELCONQUE

Revenons au problème posé au n° 1. Nous supposons que  $a, b_1, \dots, b_k$  sont nuls; on peut toujours se ramener à ce cas au moyen d'une translation. Les  $k$  fonctions holomorphes  $f_i(x, y_1, \dots, y_k)$  admettent les développements de Taylor

$$(4. 1) \quad f_i(x, y_1, \dots, y_k) = \sum_{p, q_1, \dots, q_k \geq 0} c_{p, q_1, \dots, q_k}^{(i)} x^p y_1^{q_1} \dots y_k^{q_k}.$$

Ces séries étant données, on se propose de déterminer des séries entières

$$(4. 2) \quad \varphi_i(x) = \sum_{n \geq 1} a_n^{(i)} x^n$$

qui convergent au voisinage de 0 et satisfassent aux relations (1. 2).

Comme dans le cas où  $k = 1$ , on va procéder en deux étapes : on va d'abord résoudre formellement les équations (1. 2); on démontrera ensuite la convergence des séries entières obtenues.

La solution formelle des équations (1. 2) est unique; on doit écrire que l'on a, pour chaque  $i$ ,

$$\sum_n (n+1) a_n^{(i)} x^n = \sum c_{p, q_1, \dots, q_k}^{(i)} x^p \left( \sum_{r_1} a_{r_1}^{(1)} x^{r_1} \right)^{q_1} \dots$$

Ceci donne, pour chaque  $i$ ,

$$(4. 3) \quad a_n^{(i)} = Q_n^{(i)}(c_{p, q_1, \dots, q_k}^{(j)})$$

où les  $Q_n^{(i)}$  sont des polynômes à coefficients rationnels  $\geq 0$  dont chacun ne dépend que d'un nombre fini des variables  $c_{p, q_1, \dots, q_k}^{(j)}$  (l'indice  $j$  prenant les valeurs 1, ...,  $k$ ).

On va maintenant montrer que si les séries entières (4. 1) convergent au voisinage de l'origine, les séries (4. 2) dont les coefficients sont donnés



par (4. 3) ont un rayon de convergence non nul. Pour cela, on va remplacer chaque série  $f_i$  par une série majorante  $F_i$ . Soit  $(\Phi_1, \dots, \Phi_k)$  l'unique solution formelle du « système majorant »

$$(4. 4) \quad \frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, \dots, y_k).$$

Alors, pour chaque  $i$ ,  $\Phi_i$  est une majorante de  $\varphi_i$  (démonstration analogue à celle de la proposition 3. 1). Il reste à déterminer explicitement les  $F_i$  et les  $\Phi_i$ .

Par hypothèse, les  $f_i$  sont holomorphes dans un voisinage du polydisque fermé

$$(4. 5) \quad |x| \leq r, \quad |y_i| \leq r \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq k,$$

et leurs valeurs absolues  $|f_i|$  sont majorées par un nombre  $M$  sur ce polydisque. On en déduit que les

$$(4. 6) \quad C_{p, q_1, \dots, q_k}^{(i)} = \frac{M}{r^p \cdot q_1^{p_1} \dots r^{q_k}}$$

sont les coefficients de séries majorantes  $F_i$ . Le système différentiel (4. 4) s'écrit donc

$$(4. 7) \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}} \left( \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - \frac{y_i}{r}} \right).$$

Soit  $y_i = \Phi_i(x)$  l'unique solution formelle du système différentiel (4. 7). On va montrer que toutes les séries  $\Phi_i$  sont égales à une même série  $\Phi$ . En effet, soit  $y = \Phi(x)$  l'unique solution formelle de l'équation différentielle

$$(4. 8) \quad \left(1 - \frac{y}{r}\right)^k \frac{dy}{dx} = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}.$$

Il est clair que si l'on pose  $y_i = \Phi(x)$  pour tout  $i$ , on obtient bien une solution formelle de (4. 7); ceci démontre l'assertion.

En définitive, tout revient à prouver que la série formelle  $y = \Phi(x)$ , solution de l'équation (4. 8), admet un rayon de convergence non nul. Or l'équation différentielle (4. 8) s'intègre par quadrature : la solution qui s'annule pour  $x = 0$  est donnée par

$$(4. 9) \quad y = r \left\{ 1 - \left[ 1 + (k + 1)M \log \left( 1 - \frac{x}{r} \right) \right]^{\frac{1}{k+1}} \right\},$$

et le second membre de (4. 9) est bien une fonction  $\Phi(x)$  holomorphe au

voisinage de  $x = 0$ ; son rayon de convergence est donc bien  $\neq 0$ . En fait, le rayon de convergence est égal à

$$r \left( 1 - e^{-\frac{1}{(k+1)M}} \right).$$

## 2. Dépendance des paramètres et des conditions initiales

### I. DÉPENDANCE DES PARAMÈTRES

Nous supposons maintenant que les fonctions holomorphes  $f_i$  qui figurent au second membre du système différentiel (1. 1) du § 1 dépendent holomorphiquement de paramètres  $t_1, \dots, t_j$ . D'une façon précise, nous supposons données  $k$  fonctions

$$f_i(x, y_1, \dots, y_k; t_1, \dots, t_j)$$

holomorphes de  $k + j + 1$  variables complexes au voisinage de l'origine. Pour chaque système  $(t_1, \dots, t_j)$  suffisamment voisin de  $(0, \dots, 0)$  le système différentiel

$$(1. 1) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_k; t_1, \dots, t_j), \quad (1 \leq i \leq k)$$

admet une solution holomorphe et une seule  $y_i = \varphi_i(x)$ , nulle pour  $x = 0$ . Les fonctions  $\varphi_i(x)$  dépendent bien entendu des valeurs données à  $t_1, \dots, t_j$ . Nous noterons

$$(1. 2) \quad y_i = \varphi_i(x; t_1, \dots, t_j), \quad (1 \leq i \leq k)$$

la solution de (1. 1) telle que  $\varphi_i(0; t_1, \dots, t_j) = 0$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

**THÉORÈME 2.** *Sous les hypothèses précédentes, les fonctions  $\varphi_i(x; t_1, \dots, t_j)$  sont des fonctions holomorphes des  $j + 1$  variables  $x, t_1, \dots, t_j$  au voisinage de l'origine  $(0; 0, \dots, 0)$ .*

Pour alléger l'écriture, on se bornera à démontrer ce théorème dans le cas où  $k = 1, j = 1$ . On a donc

$$(1. 3) \quad f(x, y; t) = \sum_{p, q \geq 0} c_{p, q}(t) x^p y^q,$$

où les coefficients  $c_{p, q}(t)$  sont eux-mêmes des séries entières en  $t$  :

$$(1. 4) \quad c_{p, q}(t) = \sum_{r \geq 0} c_{p, q, r} t^r.$$

L'unique solution formelle de l'équation différentielle

$$(1.5) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y; t)$$

à ses coefficients  $a_n$  donnés par les formules (2.6) du § 1; donc chaque  $a_n$  est lui-même une série formelle en  $t$ . Ainsi la solution formelle de l'équation (1.5) est une série formelle

$$(1.6) \quad y = \varphi(x, t)$$

par rapport aux deux variables  $x$  et  $t$ .

Pour démontrer le théorème 2, il suffit de montrer que la série formelle (1.6) converge lorsque  $x$  et  $t$  sont assez petits. Pour cela on emploie encore la méthode des majorantes. La fonction  $f(x, y, t)$  est, par hypothèse, holomorphe au voisinage d'un polydisque fermé

$$(1.7) \quad |x| \leq r, |y| \leq r, |t| \leq r, \text{ avec } r > 0.$$

Elle possède donc une série majorante  $F(x, y, t)$  de la forme

$$(1.8) \quad F(x, y, t) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{r}\right)\left(1 - \frac{t}{r}\right)}.$$

On voit que cette majorante se déduit de celle considérée au n° 3 du § 1 en remplaçant, dans le second membre de la formule (3.8) du § 1, le nombre  $M$  par  $M / \left(1 - \frac{t}{r}\right)$ . Donc la solution  $y = \Phi(x, t)$  de l'équation différentielle majorante  $\frac{dy}{dx} = F(x, y, t)$  est donnée par la relation

$$(1.9) \quad \frac{\Phi(x, t)}{r} = 1 - \left[ 1 + \frac{2M}{1 - \frac{t}{r}} \log \left( 1 - \frac{x}{r} \right) \right]^{1,2}$$

Or il est clair que le second membre de (1.9) est une fonction holomorphe des variables  $x$  et  $t$  au voisinage de l'origine  $x = 0, t = 0$ . Ceci achève la démonstration du théorème 2.

## 2. DÉPENDANCE DES CONDITIONS INITIALES

Considérons, pour simplifier, un système différentiel

$$(2.1) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_k)$$

qui ne dépend d'aucun paramètre. Les fonctions données  $f_i(x, y_1, \dots, y_k)$

sont toujours supposées holomorphes au voisinage de l'origine. Si le point  $(b_1, \dots, b_k)$  est assez voisin de l'origine, les fonctions  $f_i$  sont encore holomorphes au voisinage du point  $(0, b_1, \dots, b_k)$ . On peut donc appliquer le théorème d'existence et d'unicité (théorème 1 du § 1) : il existe une solution  $y_i = \varphi_i(x)$  et une seule du système différentiel (2. 1), holomorphe au voisinage de  $x = 0$ , et telle que  $\varphi_i(0) = b_i$ . Les fonctions  $\varphi_i(x)$  dépendent évidemment des valeurs initiales  $b_1, \dots, b_k$ ; nous les noterons  $\varphi_i(x; b_1, \dots, b_k)$ .

**THÉORÈME 3.** *Avec les notations précédentes, les fonctions  $\varphi_i(x; b_1, \dots, b_k)$  sont holomorphes par rapport aux variables  $x, b_1, \dots, b_k$  au voisinage de l'origine  $x = 0, b_1 = 0, \dots, b_k = 0$ .*

Autrement dit, la solution du système différentiel (2. 1) dépend holomorphiquement des valeurs initiales  $b_i$  des fonctions inconnues  $y_i$ .

*Démonstration.* Prenons comme nouvelles fonctions inconnues

$$(2. 2) \quad z_i = y_i - b_i.$$

Elle doivent satisfaire au système différentiel

$$(2. 3) \quad \frac{dz_i}{dx} = f_i(x, z_1 + b_1, \dots, z_k + b_k),$$

avec les valeurs initiales  $z_i(0) = 0$ . Les seconds membres des équations (2. 3) dépendent holomorphiquement des paramètres  $b_1, \dots, b_k$  au voisinage de l'origine. D'après le théorème 2, l'unique solution de (2. 3) qui s'annule pour  $x = 0$  est une fonction holomorphe  $z_i = \psi_i(x; b_1, \dots, b_k)$ . La solution de (2. 1) telle que  $y_i = b_i$  pour  $x = 0$  est donnée par

$$y_i = b_i + \psi_i(x; b_1, \dots, b_k)$$

et est par conséquent holomorphe en  $x, b_1, \dots, b_k$  au voisinage de l'origine. Ceci démontre le théorème 3.

### 3. Équations différentielles d'ordre supérieur

On se bornera à un exemple : celui d'une seule équation différentielle d'ordre  $k$  :

$$(3. 1) \quad \frac{d^k y}{dx^k} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}).$$

La fonction donnée  $f$  est une fonction holomorphe de  $k + 1$  variables au voisinage d'un point  $(a, b, b_1, \dots, b_{k-1})$ . On cherche une fonction  $y = \varphi(x)$ , holomorphe au voisinage du point  $x = a$ , telle que  $\varphi(a) = b$  et que les dérivées successives  $\varphi'(x), \dots, \varphi^{(k-1)}(x)$  prennent au point  $a$  les valeurs

$b_1, \dots, b_{k-1}$ , et telle enfin que l'on ait identiquement, pour  $x$  assez voisin de  $a$ ,

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k-1)}(x)).$$

**THÉORÈME 4.** *Le problème précédent admet une solution et une seule.*

*Démonstration.* On ramène classiquement la résolution d'une équation différentielle telle que (3. 1) à celle d'un système différentiel du premier ordre, par l'introduction de nouvelles fonctions inconnues. D'une façon précise, introduisons, outre la fonction inconnue  $y = \varphi(x)$ , les fonctions

$$y' = \frac{d\varphi}{dx}, \dots, y^{(k-1)} = \frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}}.$$

Les fonctions  $y, y', \dots, y^{(k-1)}$  doivent satisfaire au système différentiel

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y', \\ \frac{dy'}{dx} = y'', \\ \dots, \\ \frac{dy^{(k-2)}}{dx} = y^{(k-1)}, \\ \frac{dy^{(k-1)}}{dx} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}). \end{cases}$$

On applique au système (2) le théorème 1 du § 1, ce qui démontre le présent théorème 4.

## Exercices

1. Soit donnée une équation différentielle linéaire de la forme suivante :

$$(1) \quad (a_0x + b_0)y^{(n)} + (a_1x + b_1)y^{(n-1)} + \dots + (a_{n-1}x + b_{n-1})y' + a_n y = 0.$$

Montrer que, si  $U(z)$  est une fonction continue dans un ouvert  $D$ , et  $\gamma$  un chemin différentiable par morceaux dans  $D$ , ayant son origine en  $z_0$ , son extrémité en  $z_1$ , la fonction  $f(x)$  définie par l'intégrale

$$(2) \quad f(x) = \int_{\gamma} e^{z^2} U(z) dz$$

est partout holomorphe dans le plan de la variable  $x$ . Pour que  $f(x)$  soit une solution de (1), il suffit que l'on ait

$$(i) \quad [e^{z^2} A(z) U(z)]_0^1 = 0,$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dz}(A(z)U(z)) = B(z)U(z),$$

si on pose

$$A(z) = a_0 z^n + \dots + a_n, \quad B(z) = b_0 z^n + \dots + b_n.$$

Supposons que  $A(z)$  possède  $n$  zéros  $c_1, \dots, c_n$ , deux à deux distincts. Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{B(z)}{A(z)} = z + \frac{\alpha_1}{z - c_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{z - c_n},$$

où  $\alpha, z_1, \dots, z_n$  sont des constantes complexes, et en déduire que si  $\gamma_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) désigne un chemin différentiable fermé dans  $D$ , où  $D = \mathbb{C} - \{c_1, \dots, c_n\}$ , partant d'un point fixe  $z_0 \in D$  et contournant une fois le point  $c_j$ , et si  $\gamma_{j,k}$  ( $1 \leq j, k \leq n$ ) désigne le contour défini en parcourant successivement  $\gamma_j$  dans le sens direct,  $\gamma_k$  dans le sens direct, puis  $\gamma_j$  dans le sens indirect, et finalement  $\gamma_n$  dans le sens indirect, et si on prend la fonction

$$U(z) = \frac{1}{A(z)} e^{z^2} (z - c_1)^{\alpha_1} \dots (z - c_n)^{\alpha_n} \quad \text{pour } z \in D,$$

fonction en général multiforme, l'intégrale (2), où on prend  $\gamma = \gamma_{j,k}$  (donc  $z_0 = z_1$ ) définit une solution de (1). Montrer que l'on obtient ainsi au plus  $n - 1$  solutions (qui sont holomorphes dans le plan).

2. Démonstration du théorème des fonctions implicites (proposition 6. 1 du chapitre IV, § 5, n° 6) par la méthode des séries majorantes (on suivra les notations de l'énoncé de la proposition citée) : montrer d'abord que l'on peut se ramener au cas où  $a_j = b_j = c_k = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, p$ , et que l'on a

$$(1) \quad f_j(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p) = c_{j1}(z) x_1 + \dots + c_{jn}(z) x_n + \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_n \geq 2} c_{j\nu_1 \dots \nu_n}(z) x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n},$$

où les coefficients  $c_{j\nu}(z)$  et  $c_{\nu_1 \dots \nu_n}(z)$  sont eux-mêmes des séries entières en  $z_1, \dots, z_p$ , et

$$\det (c_{j\nu}(z)) \neq 0$$

pour  $x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p$  assez petits.

En déduire, utilisant la formule de Cramer, que le système (6. 1) du chapitre IV, § 5 est équivalent à

$$(2) \quad x_j = \gamma_{j1}(z) y_1 + \dots + \gamma_{jn}(z) y_n + \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_n \geq 2} \gamma_{j\nu_1 \dots \nu_n}(z) x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n},$$

$j = 1, \dots, n$ , où les coefficients  $\gamma$  sont aussi des séries entières en  $z_1, \dots, z_p$ , et que (2) s'écrit par suite

$$(3) \quad x_j = \sum_{\substack{1 \leq j' \leq n \\ x_1, \dots, x_p \geq 0}} \gamma_{j'; x_1, \dots, x_p} y_{j'} z_1^{x_1} \dots z_p^{x_p} \\ + \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_n \geq 1 \\ x_1, \dots, x_p \geq 0}} \gamma_{j; \nu_1, \dots, \nu_n; x_1, \dots, x_p} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} z_1^{x_1} \dots z_p^{x_p}, \quad j = 1, \dots, n,$$

Montrer que, pour que les  $n$  séries formelles

$$(4) \quad x_j = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_n + \sigma_1 + \dots + \sigma_p \geq 1} d_{j; \mu_1, \dots, \mu_n; \sigma_1, \dots, \sigma_p} y_1^{\mu_1} \dots y_n^{\mu_n} z_1^{\sigma_1} \dots z_p^{\sigma_p}, \\ j = 1, \dots, n,$$

forment un système de solutions formelles de (3), il faut et il suffit que l'on ait

$$d_{j; \mu_1, \dots, \mu_n; \sigma_1, \dots, \sigma_p} = Q_{j; \mu_1, \dots, \mu_n; \sigma_1, \dots, \sigma_p}(\gamma, d),$$

où  $Q$  désigne un polynôme bien déterminé à coefficients entiers en  $\gamma_{j'; x_1, \dots, x_p}$ ,  $\gamma_{j; \nu_1, \dots, \nu_n; x_1, \dots, x_p}$  et en  $d_{j; \lambda_1, \dots, \lambda_n; \tau_1, \dots, \tau_p}$  ces derniers n'intervenant que si

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \tau_1 + \dots + \tau_p < \mu_1 + \dots + \mu_n + \sigma_1 + \dots + \sigma_p.$$

En déduire qu'il existe un système et un seul de solutions formelles de (3).

Pour montrer la convergence des séries obtenues, montrer que (3) admet une série majorante de la forme suivante :

$$X_j = \frac{M}{1 - \frac{Z_1 + \dots + Z_p}{R}} \left\{ Y_1 + \dots + Y_n + \frac{1}{1 - \frac{X_1 + \dots + X_n}{R}} - 1 - \frac{X_1 + \dots + X_n}{R} \right\},$$

où  $M, R$  sont deux constantes réelles positives (remarquer que le développement en série entière de  $\frac{1}{(1 - T_1) \dots (1 - T_n)}$  est majoré par celui de  $\frac{1}{1 - (T_1 + \dots + T_n)}$ ), et que par suite, en faisant  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$ , on obtient une majorante des séries (4), en résolvant l'équation du second degré en  $X$  :

$$X = \frac{M}{1 - \frac{Z_1 + \dots + Z_p}{R}} \left\{ Y_1 + \dots + Y_n + \frac{1}{1 - nX/R} - 1 - \frac{nX}{R} \right\}$$

(voir la démonstration de la proposition 9. 1 du chapitre 1, § 2, n° 9).

## Quelques réponses numériques ou quantitatives

### CHAPITRE I

$$\begin{aligned}
 3. \quad P_2 &= a_2 b_1^2, \quad P_3 = 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3, \\
 P_4 &= a_2(2b_1 b_3 + b_2^2) + 3a_3 b_1^2 b_2 + a_4 b_1^4, \\
 P_5 &= 2a_2(b_1 b_4 + b_3 b_2) + 3a_3(b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) + 4a_4 b_1 b_2 + a_5 b_1^5, \\
 X &+ \frac{1}{3} X^3 + \frac{2}{15} X^5 + \dots
 \end{aligned}$$

$$4. \quad a) \text{ infini, } b) \ 1, \ c) \ \inf\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right).$$

6. I.

14. (ii)  $n\pi/a$ ,  $n$  entier.

### CHAPITRE III

$$17. \quad (i) \quad x = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \quad y = \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \quad u = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

$$20. \quad (i) \quad (\pi(2n-2)!)/(2^{2n-1}[(n-1)!]^2 a^{n-1/2} b^{1/2}),$$

$$(ii) \quad \pi(|b| - |a|),$$

$$(iii) \quad \pi(e^{-a} - 1/2),$$

$$(iv) \quad \pi a^n / (1 - a^2) \quad \text{si } |a| < 1, \quad \pi / a^n (a^2 - 1) \quad \text{si } |a| > 1.$$

$$23. \quad (ii) \quad \pi / (n \sin(\alpha + 1)\pi/n).$$

$$25. \quad (i) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{a + bn^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \coth \pi \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{1}{a} \right),$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n^4 + a^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a} \frac{\operatorname{sh} \pi a \sqrt{2} - \sin \pi a \sqrt{2}}{\operatorname{ch} \pi a \sqrt{2} - \cos \pi a \sqrt{2}},$$

$$(ii) \quad \sum_{p \geq 1} \frac{1}{x^2 - p^2} = \frac{1}{2x} \left( \pi \operatorname{ctg} \pi x - \frac{1}{x} \right).$$

### CHAPITRE V

$$8. \quad (-1)^n / n!$$

$$9. \quad a_6 = a_2^3/3, \quad a_8 = 3a_2 a_4 / 11.$$

### CHAPITRE VI

7.  $w = rz / \sqrt{a^2 z^2 + r^4 - a^4}$  avec la détermination du radical qui est réelle positive pour  $z$  réel.



## Index terminologique

Les chiffres de référence indiquent successivement

le chapitre,

le paragraphe

et le numéro (ou, éventuellement, l'exercice).

Algèbre des polynômes .....	I	1	1
Algèbre des séries formelles .....	I	1	2
Analytique (espace) .....	VI	4	2
Analytique (fonction) .....	} I IV	4	1
		2	2
Antiholomorphe (transformation) .....	VI	1	1
Argument .....	I	3	4
Automorphisme (d'un ouvert) .....	VI	2	2
Automorphisme (de la sphère de Riemann) .....	VI	2	4
Bord orienté d'un compact .....	II	1	9
Borné (sous-ensemble de $\mathcal{H}(D)$ ) .....	V	4	1
Carte .....	III	5	1
Cauchy (inégalités de) .....	III	1	1
	III	4	4
	IV	5	4
Cauchy (formule intégrale de) .....	II	2	5
	IV	5	2
Cauchy (théorème de) .....	II	2	4
Chemin différentiable .....	II	1	1
Chemin différentiable par morceaux .....	II	1	1
Chemin fermé .....	II	1	1
Chemin (non nécessairement différentiable) .....	II	1	5
Critique (point) .....	VI	1	2
Conforme (transformation) .....	VI	1	1
Conforme (représentation) .....	VI	2	1
Convergence des séries de fonctions méromorphes .....	V	2	1
Convergence normale sur tout compact .....	V	1	1
Convergence uniforme sur tout compact .....	V	1	1
Coordonnées locales .....	VI	4	1
Courbe elliptique .....	V	2	5
d'Alembert (théorème de) .....	III	1	2
Dérivée (d'une série formelle) .....	I	1	6
Dérivée (d'une série entière convergente) .....	I	2	7
Détermination du logarithme .....	I	3	5
Développable en série de Laurent (fonction) .....	III	4	2
Développable en série entière (fonction) .....	I	4	1
Développement de Laurent .....	III	4	2

Développement de Taylor .....	II	2	6
Dirichlet (problème de) .....	IV	4	3
Domaine de convergence .....	IV	1	2
Équivalentes (structures d'espace analytique) .....	VI	4	2
Espace analytique .....	VI	4	2
Étoilé (ensemble) .....	II	1	7
Exponentielle (fonction) .....	I	3	1
— réelle .....	I	3	2
— imaginaire .....	I	3	3
Famille normale .....	V	4	
Fonction $I'$ .....	V	3	4
Fonction $\wp$ de Weierstrass .....	V	2	5
Forme différentielle fermée .....	II	1	4
Forme différentielle holomorphe sur un espace ana- lytique .....	VI	4	8
Green-Riemann (formule de) .....	II	1	3 et 9
Groupe d'automorphismes .....	VI	2	2
— du plan .....	VI	2	3
Groupe de périodes .....	III	5	5
Hadamard (formule de) .....	I	2	3
Hadamard (théorème des trois cercles) .....	III		exerc. 8
Harmonique (fonction) .....	IV	3	1
Hartogs .....	IV	5	2
Holomorphe (fonction) .....	II	2	2
— sur la sphère de Riemann .....	III	5	1
— à l'infini .....	III	5	1
— de plusieurs variables .....	IV	3	1
— sur un espace analytique .....	VI	4	1
— sur une surface de Riemann .....	VI	5	2
Homotopes (chemins) avec extrémités fixes .....	II	1	6
comme chemins fermés .....	II	1	6
Indice (d'un chemin fermé) .....	II	1	8
Indice de ramification .....	VI	4	6
Inverse (d'une série entière convergente) .....	I	2	6
Inverse (d'une série formelle) .....	I	1	5
Inversion-symétrie .....	VI	2	5
Isomorphisme (d'un ouvert sur un autre) .....	VI	1	3
Isomorphisme d'espaces analytiques .....	VI	4	2
Laplacien .....	IV	3	1
Laurent (développement de) .....	III	4	2
Laurent (série de) .....	III	4	1

Liouville (théorème de) .....	III	1	2
Logarithme complexe .....	I	3	5
Méromorphe (fonction) .....	I	4	5
— à l'infini .....	III	5	1
— sur un espace analytique .....	VI	4	5
— sur une surface de Riemann ..	VI	5	2
Mesure des angles .....	I	3	4
Module (d'un nombre complexe) .....	I	2	1
Morera (théorème de) .....	II	2	7
Non ramifiée (application) .....	VI	4	6
Non ramifiée (surface de Riemann) .....	VI	5	1
Normalement convergente (série) .....	I	2	2
Norme (d'un nombre complexe) .....	I	2	1
Noyau de Poisson .....	IV	4	1, 2
Ordre d'une série formelle .....	I	1	3
— (à plusieurs variables) .....	IV	1	1
Ordre de multiplicité d'un pôle .....	I	4	5
Ordre de multiplicité d'un zéro .....	I	4	4
Orientation (d'un chemin) .....	II	1	1
Ouverte (application) .....	VI	1	3
Parallélogramme de périodes .....	III	5	5
Périodes (de l'intégrale d'une forme différentielle sur un espace analytique) .....	VI	4	8
Picard (théorème de) .....	III	4	4
Point à l'infini .....	III	5	1
Point critique .....	VI	1	2
Point singulier essentiel .....	III	4	4
Point singulier isolé .....	III	4	4
Poisson (formule de) .....	IV	4	1
Poisson (noyau de) .....	IV	4	1, 2
Pôle .....	{ I	4	5
	{ III	4	4
Primitive d'une forme différentielle .....	II	1	2
— sur un espace ana-			
lytique .....	VI	4	8
Primitive d'une forme différentielle fermée le long d'un chemin .....	H	1	5
	{ III	2	2
Principe du maximum .....	{ VI	4	4
	{ IV	exerc.	4

	I	4	3
	IV	2	3
Principe du prolongement analytique .....	VI	4	4
	VI	5	4
Produit infini .....	V	3	1
Propriété de moyenne (fonction holomorphe) .....	III	2	1
(fonction harmonique).....	IV	3	3
	IV	4	5
Ramification .....	VI	4	6
Rayon de convergence .....	I	2	3
Réciproque (d'une série entière convergente) .....	I	2	9
Réciproque (d'une série formelle) .....	I	1	7
Relèvement .....	VI	5	4
Résidu .....	III	5	2
(sur un espace analytique) .....	VI	4	8
Revêtement .....	VI	5	1
Riemann (sphère de) .....	III	5	1
Riemann (surface de) .....	VI	5	1
Rouché (théorème de) .....	III	exerc. 19	
Schwarz (lemme de) .....	III	3	
Série de Laurent .....	III	4	1
Série de Taylor .....	III	1	1
Série formelle .....	I	1	2
— (à plusieurs variables) .....	IV	1	1
Série majorante .....	VII	1	3
Simply connexe (ouvert) .....	II	1	7
Sommable (famille de séries formelles).....	I	1	3
Sous-groupe d'isotropie.....	VI	2	3
Sous-harmonique (fonction).....	IV	exerc. 4	
Sphère de Riemann .....	III	5	1
Structure analytique induite .....	VI	4	2
Structure d'espace analytique .....	VI	4	1
Substitution (d'une série formelle dans une autre) ....	I	1	4
— (d'une série entière convergente) .....	I	2	5
Suite exhaustive de compacts .....	V	1	3
Surface de Riemann .....	VI	5	1
Symétrie (principe de) .....	II	2	9
	VI	exerc. 6	
Taylor (développement de) .....	II	2	6
Taylor (série de) .....	III	1	1
Théorème fondamental de la représentation conforme	VI	3	1
	VI	4	7
Uniformément convergente (série) .....	I	2	2

Univalente (application) .....	V	I	2
Valeur absolue (d'un nombre complexe) .....	I	2	1
Variation de l'argument .....	II	I	5
Weierstrass (fonction $\wp$ de) .....	V	2	5
Weierstrass (théorème de) .....	III	4	4

## Index des notations

$\omega(S)$ .....	I	I	3
$K[X]$ .....	I	I	1
$K[[X]]$ .....	I	I	2
$S \circ T$ .....	I	I	4
$R$ .....	I	2	1
$C$ .....	I	2	1
$ z , \bar{z}$ .....	I	2	1
$\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$ .....	I	2	1
$\int_{\gamma} \omega$ .....	II	I	1, 5
$I(\gamma, a)$ .....	II	I	8
$\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ .....	II	2	2
$M(r)$ .....	III	I	1
$S_x$ .....	III	5	1
$\operatorname{Res}(f, a)$ .....	III	5	2
$K[[X, Y]]$ .....	IV	I	1
$c(D)$ .....	V	I	1
$\mathcal{M}(D)$ .....	V	I	1
$M_r(f)$ .....	V	I	3
$d(f)$ .....	V	I	3
$\wp$ .....	V	2	5
$\Gamma$ .....	V	3	4
$\hat{z}_0, \hat{z}_1$ .....	V	exerc. 3.	II
$\Gamma(D)$ .....	VI	2	2
$\Gamma(P)$ .....	VI	2	6
$\Gamma(B)$ .....	VI	2	6

*Imprimé en France, Imprimerie de la Manutention, Mayenne*

*Dépôt légal : premier trimestre 1972.*

*Numéro d'édition : 5215 g*

*Hermann, éditeurs des sciences et des arts*

Henri Cartan

## **Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes**

Ce livre contient l'essentiel de la théorie classique des fonctions d'une variable complexe et présente, de façon sommaire, les notions d'analyticité et d'holomorphie des fonctions de plusieurs variables.

Le cas des fonctions analytiques de plusieurs variables, réelles ou complexes, est envisagé pour permettre de considérer les fonctions harmoniques de deux variables réelles comme des fonctions analytiques et de traiter du théorème d'existence des solutions d'un système différentiel dans le cas où les données sont analytiques, en utilisant la "méthode des majorantes".

Dans son mode d'exposition de ce sujet classique, l'auteur traite notamment de la théorie des séries entières formelles et de la notion d'"espace analytique" abstraite, dite usuellement "surface de Riemann". Les questions de topologie plane, indispensables lors du traitement de l'intégrale de Cauchy, sont abordées selon un point de vue un peu différent de celui d'Ahlfors.

A d'infimes exceptions près, des démonstrations complètes sont données de tous les énoncés du texte, traités de manière détaillée.

L'ouvrage comprend les chapitres suivants : séries entières à une variable – fonctions holomorphes, intégrale de Cauchy – développements de Taylor et de Laurent. points singuliers, résidus – fonctions analytiques de plusieurs variables, fonctions harmoniques – convergence des suites de fonctions holomorphes ou méromorphes, séries, produits infinis, familles normales – transformations holomorphes – systèmes différentiels holomorphes.

Chaque chapitre est complété par de nombreux exercices et problèmes qui, choisis par Reiji Takahashi, permettent au lecteur de vérifier s'il a bien assimilé les questions théoriques.

ISBN 2 7056 5215 9